בס"ד

פתרון מועד א' באינפי' 2

<u>שאלה 1</u>. תהיינה $f_n(x), f(x) : [a,b] \to [c,d]$ כך שמתקיים כי $f_n(x) \to f(x)$ במ"ש בקטע $[a,b]$.

תהא $g(x) : [c,d] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $[c,d]$. הוכיחו כי סדרת הפונקציות $g(f_n(x))$ מתכנסת במ"ש לפונקצית הגבול $g(f(x))$.

<u>רמז</u>: כל הקטעים סגורים וזה לא נכון אם הם לא.

פתרון: כיוון ש- g רציפה בקטע סגור $[c,d]$ אז עפ"י קנטור היא רציפה במידה שווה שם.

ולכן בהינתן $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך ש:

$$\forall y_1, y_2 \in [c,d]: \ |y_1 - y_2| < \delta \ \to \ |g(y_1) - g(y_2)| < \varepsilon$$

ובפרט עבור: $y_1 = f_n(x), y_2 = f(x)$ מתקיים:

$$(*) \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta \ \to \ |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$$

אבל עפ"י הנתון של התכנסות במ"ש של $f_n(x)$, לכל $\varepsilon' > 0$, ובפרט עבור $\varepsilon' = \delta$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$\forall n > n_0, \ x \in [a,b]: \ |f_n(x) - f(x)| < \delta$$

ולכן ביחד עם (*) נקבל:

$$\forall n > n_0, \ x \in [a,b]: \ |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon .$$

<u>שאלה 2</u>.

א. הגדר מהי קבוצה סגורה ומהי קבוצה חסומה ותן דוגמה לקבוצה סגורה שאינה חסומה.

ב. הוכח שאם $f(x,y)$ רציפה בתחום סגור וחסום אז היא רציפה במידה שווה שם.

פתרון:

א. קבוצה סגורה היא קבוצה המכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.
קבוצה נקראת חסומה אם קיים כדור בעל רדיוס סופי המכיל אותה.
דוגמה לקבוצה שהיא סגורה אך אינה חסומה היא $\mathbb{Z}$ (המספרים השלמים).

ב. <u>הוכחה</u>: נניח בשלילה כי f אינה רציפה במידה שווה, כלומר קיים $\varepsilon > 0$ כל שלכל $n \in \mathbb{N}$, קיימות שתי **נקודות** P_n, Q_n בתחום כך שלמרות ש: $\overline{P_n Q_n} < \frac{1}{n}$ הן מקיימות: $|f(P_n) - f(Q_n)| \ge \varepsilon$.
כך נבנה את הסדרות $\{P_n\}, \{Q_n\}$ עבורן: $\lim_{n\to\infty} \overline{P_n Q_n} = 0$ אך: $\forall n: \ |f(P_n) - f(Q_n)| \ge \varepsilon$.

כעת עפ"י משפט בולצאנו-ווירשטראס (התחום הוא חסום) קיימת תת-סדרה P_{n_k} השואפת לנקודה P_0 השייכת לתחום בהיותו סגור, כלומר: $f\left(P_0\right)<\infty$. כיוון ש: $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{P_nQ_n}=0$, גם $Q_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}P_0$.

על כן גם מתקיים: $\lim\limits_{k\to\infty}\left|f\left(P_{n_k}\right)-f\left(Q_{n_k}\right)\right|=0$ בסתירה ל- $\forall n:\ \left|f\left(P_n\right)-f\left(Q_n\right)\right|\geq\varepsilon$. □

<u>**שאלה 3**</u>. יהיו $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ו- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ שני טורי חזקות עם רדיוסי התכנסות R_1 ו- R_2 בהתאמה, ונתון: $R_2<R_1$.

הוכח כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n$ הוא R_2.

<u>**פתרון:**</u> בתחום $|x|<R_2$ שני הטורים מתכנסים בהחלט ולכן ניתן להחליף שם את סדר הסכימה:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

ומכאן שגם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n$ מתכנס שם בהחלט.

בתחום $R_2<|x|<R_1$, נניח בשלילה כי סכום שני הטורים מתכנס. כיוון שהטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בהחלט ניתן להחסיר את סכומו ולקבל שהטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ מתכנס, בסתירה לתכונה של טור חזקות שמתבדר עבור $|x|$ שגדול מרדיוס ההתכנסות שלו. מכאן שבהכרח סכום הטורים מתבדר שם, ולכן בכל סדר סכימה הסכום שלהם יתבדר, בפרט הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n$ מתבדר.

בתחום $|x|>R_1$ לא יתכן שהטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n$ יחזור להתכנס שכן זהו טור חזקות סביב האפס וככזה תחום ההתכנסות שלו (<u>לא כולל הקצוות</u>) הוא תמיד מהצורה: $|x|<R$.

מסקנה: הרדיוס של $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)x^n$ הוא R_2.

שאלה 4.

א. חשב את הפונקציה: $x>0$, $f\left(x\right)=\int\limits_0^\infty e^{-tx}dt$.

ב. הוכח כי האינטגרל: $\int\limits_0^\infty t^n e^{-tx}dt$ מתכנס לכל: $x>0,\ n\in\mathbb{N}$.

ג. היעזר ב- f כדי להראות את השוויון: $n!=\int\limits_0^\infty t^n e^{-t}dt$. נמק את צעדיך !

פתרון:

א. נחשב: $\int\limits_0^\infty e^{-tx}dt=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-tx}dt=\lim\limits_{b\to\infty}-\frac{e^{-tx}}{x}\Bigg|_{t=0}^{t=b}=\lim\limits_{b\to\infty}-\frac{e^{-bx}}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$.

ב. נשים לב כי ב- $t=0$ אין בעיה שכן הפונקציה שואפת שם לאפס ולכן היא חסומה.

לגבי הגבול האינסופי, ניעזר במבחן ההשוואה הגבולי: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^n e^{-xt}}{\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to\infty}t^{n+2}e^{-xt}=0$ לכל $x>0$

לכן כיוון ש $\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ מתכנס, גם האינטגרל שלנו מתכנס.

כיוון שהפונקציה בתוך האינטגרל גזירה חלקית עפ"י x, ניתן להיעזר בכלל לייבניץ ולגזור בתוך

האינטגרל: $-\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^\infty e^{-xt}dt=-\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}e^{-xt}dt=\int\limits_0^\infty te^{-xt}dt$ ולכן: $\frac{1}{x^2}=\int\limits_0^\infty te^{-xt}dt$

אם נמשיך בתהליך הזה (האינטגרל מתכנס עפ"י סעיף ב') נקבל: $\int\limits_0^\infty t^n e^{-xt}dt=\frac{n!}{x^{n+1}}$.

כעת כל שנותר הוא להציב: $x=1$.

שאלה 5. מצא נקודה על הפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$ הקרובה ביותר לישר $3x-6y+4=0$.

<u>רמז</u>: מרחק הנקודה $\left(x,y\right)$ מהישר $ax+by+c=0$ הוא: $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

פתרון: צריך למצוא קיצון של הפונקציה: $f\left(x,y\right)=3x-6y+4$ על האילוץ: $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

לצורך כך נגדיר את פונקציה לגרנז': $F_\lambda(x,y)=3x-6y+4+\lambda\left(x^2+2xy+y^2+4y\right)$ ונחפש נקודה

$P_0=(x_0,y_0)$ שהיא פיתרון של מערכת המשוואות: $\begin{cases}\dfrac{\partial F_\lambda}{\partial x}(P_0)=0\\ \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial y}(P_0)=0\\ \dfrac{\partial F_\lambda}{\partial \lambda}(P_0)=0\end{cases}$. נקבל: $P_0=\left(-\frac{5}{9},-\frac{1}{9}\right)$.

כעת, כיוון שזו היא נקודת קיצון יחידה, קל לראות ע"י הצבת ערכים בסביבתה בפונקציה שזו נקודת מינימום.

<u>שאלה 6</u>. תהא $f(x,y)$ רציפה בתחום $D=[0,1]\times[-1,1]$ והמקיימת בתחום זה: $\frac{1}{2}e^{xy}\le f(x,y)\le e^{xy}$.

הוכח כי קיימת נקודה $y_0\in[-1,1]$ בה: $\int_0^1 f(x,y)dx=0.7$.

פתרון: $\varphi(y)=\int_0^1 f(x,y)dx$ רציפה. אי-השוויון $\frac{1}{2}e^{xy}\le f(x,y)\le e^{xy}$ גורר אי-שוויון של האינטגרלים:

$\frac{1}{2}\int_0^1 e^{xy}dx\le\varphi(y)\le\int_0^1 e^{xy}dx$ וזה נכון לכל $y\in[-1,1]$.

עבור $y=1$ נקבל: $\frac{1}{2}(e-1)\le\varphi(1)\le e-1$ ובנקודה $y=-1$ נקבל: $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\le\varphi(-1)\le1-\frac{1}{e}$.

שני התחומים הנ"ל אינם חופפים כלל ולכן $\varphi(y)$ חייבת בדרך - באשר היא רציפה – לעבור בכל אחד מן הערכים

שבתווך שביניהם: $\left[1-\frac{1}{e},\frac{1}{2}(e-1)\right]$. היא מקבלת עפ"י משפט ערך הביניים כל ערך ביניים בתווך ובפרט: 0.7.

<u>שאלה 7</u>.

א. היעזר בדיפרנציאל מסדר ראשון כדי להעריך בקירוב את: $\sqrt[4]{15.09+(0.99)^2}$.

ב. קבע היכן לפונקציה $f(x,y)=(xy)^{1/3}$ קיימות נגזרות חלקיות והיכן היא דיפרנציאבילית.

פתרון:

א. נחשב את הדיפרנציאל של הפונקציה $f\left(x,y\right)=\sqrt[4]{x+y^2}$ בנקודה הנוחה לחישוב $P_0=\left(15,1\right)$ יחד עם ההפרשים: $\Delta x=0.09,\ \Delta y=-0.01$. נקבל שם:

$$f\left(P_0\right)=\sqrt[4]{16}=2\ ,$$

$$df\left(P_0\right)=f_x\left(P_0\right)\Delta x+f_y\left(P_0\right)\Delta y=\frac{0.09}{4\left(x+y^2\right)^{3/4}}\left(P_0\right)-\frac{0.01\cdot 2y}{4\left(x+y^2\right)^{3/4}}\left(P_0\right)=\frac{0.09-0.02}{32}$$

ולכן: $\sqrt[4]{15.09+\left(0.99\right)^2}\approx 2+\frac{0.9-0.02}{32}=2.0021875$.

ב. חישוב נגזרות חלקיות עפ"י כללי הגזירה נותן:

$$f_x\left(x,y\right)=\left(x^{1/3}y^{1/3}\right)_x=\frac{y^{1/3}}{3x^{2/3}},\ f_y\left(x,y\right)=\frac{x^{1/3}}{3y^{2/3}}.$$

בכל מקום מחוץ לצירים: $x=0,y=0$ הן שתיהן קיימות ורציפות ולכן הפונקציה גם דיפרנציאבילית.
בנקודות על הישר $x=0$ ערך הנגזרות תלוי במסלול התקרבותן, כלומר הגבול אינו קיים ולכן הנ"ח אינן רציפות שם. נבדוק אם כן עפ"י ההגדרה, כלומר רק במסלול אחד. עבור נקודות $\left(0,y\right),y\neq 0$ נקבל:

$$f_x\left(0,y\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h,y\right)-f\left(0,y\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(hy\right)^{1/3}}{h}=y^{1/3}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}=\text{לא קיים}$$

ובאופן סימטרי זהו המצב גם בנקודות $\left(x,0\right),x\neq 0$. כיוון שהנגזרות החלקיות אינו קיימות הפונקציה אינה דיפרנציאבילית שם. נותר לבדוק את המצב בראשית. שם:

$$f_x\left(0,0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

ובאופן סימטרי גם: $f_y\left(0,0\right)=0$. לכן לא נוכל לשלול את הדיפרנציאביליות בשלב הזה.

אבל אם נכתוב:

$$\Delta z=f\left(\Delta x,\Delta y\right)-f\left(0,0\right)=\left(\Delta x\Delta y\right)^{1/3}=\underbrace{f_x\left(0,0\right)}_{=0}\cdot\Delta x+\underbrace{f_y\left(0,0\right)}_{=0}\cdot\Delta y+\varepsilon\left(\Delta x,\Delta y\right)\cdot\rho$$

כאשר: $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ נקבל: $\varepsilon=\frac{\left(\Delta x\Delta y\right)^{1/3}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ ולפונקציה זו אין גבול כפול בראשית.

אפשר למשל להציב: $\Delta y=\Delta x$ ולקבל: $\varepsilon=\frac{\Delta x^{2/3}}{\sqrt{2}\left|\Delta x\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\left|\Delta x\right|^{1/3}}\xrightarrow{\Delta x\to 0}\infty$.

מכאן שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית גם לא בראשית.