אינפי 1 – תרגיל 12

.1

a. הוכח/הפרך: f גזירה ב x_0 לכן f רציפה ב x_0

הוכחה: נניח ש f גזירה ב x_0 ולכן הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ קיים. לפי היינה, לכל סדרה $x_0 \ne x_n \to x_0$ מתקיים $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\to L$ ברור ש $x_n - x_0 \to 0$ ולכן $f(x_n)-f(x_0)\to 0$ (זה תרגיל מסדרות; אחרת יש תת סדרה $f(x_{n_k})-f(x_0)$ שגדולה מ $\varepsilon>0$ כלשהו, ולכן $\frac{f(x_{n_k})-f(x_0)}{x_{n_k}-x_0}\to\infty$ בסתירה).

ולכן לפי היינה $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$ כלומר $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ כלומר f רציפה ב x_0.

b. הוכח/הפרך: f רציפה ב x_0 לכן f גזירה ב x_0

הפרכה: תהיי $f=|x|$. כאשר מחשבים את הגבול החד צדדי מימין, ה x-ים חיוביים ולכן

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

ומצד שני

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1$$

ולכן הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ אינו קיים והפונקציה אינה גזירה באפס, אבל הפונקציה כן רציפה באפס.

2. גזור את הפונקציות הבאות לפי הגדרה:

a. $f(x)=\cos x$

פתרון:

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\sin x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

b. $g(x)=xf(x)$ כאשר $f(x)$ גזירה ונגזרתה הינה $f'(x)$ (בטא את הנגזרת של g בעזרת $f(x), f'(x)$)

פתרון:
$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)f(x+\Delta x)-xf(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}x\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{\Delta x\cdot f(x+\Delta x)}{\Delta x}=$$

$=\lim_{\Delta x\to 0}x\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+f(x+\Delta x)$ מכיוון ש f גזירה אזי מתקיים

$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ובנוסף היא בהכרח רציפה ולכן $\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$.

ובסה"כ $g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}x\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+f(x+\Delta x)=xf'(x)+f(x)$

c. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בנקודה 0. [רמז: אפשר לפתור בעזרת הגדרת הנגזרת] (שימו לב שזו דוגמא לפונקציה שגזירה בנקודה, ואינה רציפה באף מקום פרט לנקודה)

פתרון: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$. אבל $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{x^2}{x}\right|=|x|$ ולכן לכל סדרה $x_n\to 0$

$0\le\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|\le|x_n|\to 0$ ולכן $\frac{f(x_n)}{x_n}\to 0$ ולכן לפי היינה $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

3. גזור את הפונקציות הבאות בעזרת משפטים:

a. $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

פתרון: לפי נגזרת של מנה: $tg'(x)=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

b. $\left(x^3+4\right)^{1000}$

פתרון: ידוע ש $\left(x^{1000}\right)'=1000x^{999}$ ולכן לפי נגזרת של הרכבה, הנגזרת הינה

$$\left[1000\left(x^3+4\right)^{999}\right]\left[3x^2\right]$$

c. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

פתרון: לפי נגזרת של הרכבה ומנה; $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ולכן הנגזרת הינה

$f'(x)\ \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$, $f'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$ ולכן סה"כ הנגזרת הינה

$$\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x+1}}=\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{2}{(x-1)^2}\ \frac{-1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

4. [שאלה ממבחן של פרופסור זלצמן] גזור את הפונקציות הבאות:

a. $2^{x^e}\cdot e^{x^x}$

פתרון:

$$\left[2^{x^e}\cdot e^{x^x}\right]'=\left[2^{x^e}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}\left[e^{x^x}\right]'=\left[e^{\log 2^{x^e}}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[x^x\right]'=$$

$$=\left[e^{x^e\log 2}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[e^{x\log x}\right]'=2^{x^e}ex^{e-1}\log 2\cdot e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}x^x\left[\log x+1\right]=$$

$$2^{x^e}e^{x^x}\left[ex^{e-1}\log 2+x^x\left[\log x+1\right]\right]$$

b. $\frac{\tan(e^{x^2})}{\sqrt{(\log x)^2+1}}$

פתרון:

$$\left[\frac{\tan\left(e^{x^2}\right)}{\sqrt{(\log x)^2+1}}\right]'=\frac{\left[\tan\left(e^{x^2}\right)\right]'\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\left[\sqrt{(\log x)^2+1}\right]'}{(\log x)^2+1}=$$

$$\frac{\frac{2xe^{x^2}}{\left[\cos e^{x^2}\right]^2}\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\frac{2\log x}{2x\sqrt{(\log x)^2+1}}}{(\log x)^2+1}$$

c. $\dfrac{1}{\log(\log(e^{e^x}))}$

פתרון:

$$\frac{1}{\log\left(\log e^{e^x}\right)}=\frac{1}{\log\left(e^x\log e\right)}=\frac{1}{\log\left(e^x\right)}=\frac{1}{x\log\left(e\right)}=\frac{1}{x}$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]'=-\frac{1}{x^2}$$

5. תהי $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. אנו יודעים כי יש לפונקציה זו אי רציפות סליקה ב0. האם הפונקציה המתקבלת לאחר סילוק אי הרציפות גזירה באפס? כלומר, האם $g(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה באפס? (הוכח/הפרך לפי הגדרת הנגזרת)

הפרכה: נראה שלא קיים הגבול $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. הגבול הזה לא קיים כי קיימות שתי סדרות $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\ y_n=\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ שתיהן שואפות לאפס ושונות מאפס אך $f(x_n)\to 1,\ f(y_n)\to -1$ ולכן לא יכול להיות קיים גבול לפי היינה, ולכן הפונקציה אינה גזירה באפס.

6. נניח f מונוטונית עולה וגזירה בכל הממשיים, הוכח ש $0\leq f'$ בכל הממשיים (השתמש בהגדרת הנגזרת, אפשר להשתמש בהיינה ובידע שלנו לגבי סדרות).

הוכחה: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ עבור $x>x_0$ מתקיים $f(x)\geq f(x_0)$ כי הפונקציה מונוטונית, ועבור $x<x_0$ מתקיים $f(x)\leq f(x_0)$ ולכן תמיד $0\leq\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ ולכן הגבול גם גדול שווה אפס (זה נובע ישירות מהתכונה הדומה עבור סדרות, ומהגדרת הגבול לפי היינה). ולכן $0\leq f'$.

תזכורת (קירוב ליניארי): $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ כאשר x קרוב ל x_0

7. מצא קירובים ליניאריים לערכים הבאים:

a. $\arctan(1.01)$ (זכרו כי $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$)

פתרון: מכיוון ש $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ נובע לפי הגדרה ש $tg\frac{\pi}{4} = 1$ ולכן $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. לכן נבחר $x_0 = 1$

ולכן לפי הנוסחא לעיל $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \arctan(x_0) + \frac{1}{1 + x_0^{\,2}}(x - x_0)$ כלומר

$$\arctan(1.01) \approx \arctan(x_0) + \frac{1}{1 + x_0^{\,2}}(x - x_0) =$$

$$= \arctan(1) + \frac{1}{1 + 1^2}(1.01 - 1) = \frac{\pi}{4} + 0.005 = 0.7903981...$$

ובמציאות (במחשבון)

$$\arctan(1.01) = 0.7903732...$$

b. $(2.01)^{2\cos\ln(1.01)}$

פתרון: נבחר $x_0 = 1$, $f(x) = (1 + x)^{2\cos(\ln(x))}$. לכן

$$f'(x) = (1 + x)^{2\cos(\ln(x))}\left(2\cos(\ln(x))\ln(1 + x)\right)' =$$

$$= (1 + x)^{2\cos(\ln(x))}\left(\frac{-2\sin(\ln x)\ln(1 + x)}{x} + \frac{2\cos(\ln(x))}{1 + x}\right)$$

לכן $f(1) = (1 + 1)^{2\cos(\ln 1)} = 2^2 = 4$, $f'(1) = 4\left(0 + \frac{2}{2}\right) = 4$ ביחד:

$$(2.01)^{2\cos\ln(1.01)} = f(1.01) \approx f(1) + f'(1)(0.01) = 4 + 0.04 = 4.04$$

ובמציאות (במחשבון) $(2.01)^{2\cos\ln(1.01)} = 4.03982...$