אלגברה לינארית – תרגיל 4

שאלה 1

יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ ויהיו $W,U\subseteq V$ תתי מרחב:

$$U=span\left\{1-x,x^2,x^2-x^3,-1+x-x^2+2x^3\right\},W=\left\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\middle|\begin{matrix}p(1)=0\wedge\\p(2)+p(0)=0\end{matrix}\right\}$$

מצא בסיס ומימד של תתי המרחבים הבאים:

א. U

ב. W

ג. $U+W$

ד. $U\cap W$

א. נשים את הקואורדינאטות של הוקטורים בשורות מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&-1\\-1&1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן המימד הוא 3 והבסיס הינו $\left\{1-x.x^2,x^3\right\}$

ב. נמצא את הפולינומים שהמקדמים שלהם מקיימים את המשוואות

$$\begin{cases}a+b+c+d=0\\2a+2b+4c+8d=0\end{cases}$$

כלומר, מרחב האפס של מערכת המשוואות הנ"ל.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&4&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא מהצורה $(2t-s,s,-3t,t)=s(-1,1,0,0)+t(2,0,-3,1)$

ולכן המימד הוא 2 והבסיס הינו $\left\{x-1,2-3x^2+x^3\right\}$

ג. נשים את הקואורדינאטות של איחוד הבסיסים בשורות מטריצה ונדרג על מנת לקבל בסיס לחיבור. המימד הוא 4 והבסיס הוא הבסיס הסטנדרטי (שכן הסכום פורש את כל המרחב)

ד. לפי משפט המימדים מימד החיתוך צריך להיות אחד. במקרה זה, קל מאד לראות כי החיתוך נפרש על ידי הוקטור $1-x$

שאלה 2

א. יהיו $v_1=(1,0,1,0), v_2=(0,2,1,1), v_3=(1,2,1,2)$ ויהיה $u=(x,y,z,w)$. מצא תנאים על x,y,z,w (מערכת משוואות לינאריות) כך ש u יהיה שייך ל Span של v_1,v_2,v_3.

ב. פתור את מערכת המשוואות שמצאת בסעיף א' על מנת לקבל וקטור כללי ב $Span\{v_1,v_2,v_3\}$ (הוא וקטור הפתרון הכללי כמובן).

ג. מצא מערכת משוואות דומה לסעיף א' עבור
$w_1=(1,1,0,0), w_2=(0,1,1,0), w_3=(0,0,1,1)$

ד. נסמן $V=span\{v_1,v_2,v_3\}, W=span\{w_1,w_2,w_3\}$ עבור הוקטורים מהסעיפים הקודמים. הוכח: $u\in V\cap W$ אם"ם u מקיים את מערכת המשוואות שמכילה את כל המשוואות מסעיף א' **וגם** מסעיף ג'.

ה. מצא בסיס ל $V\cap W$ באמצעות פתרון המערכת מהסעיף הקודם.

הערה: התרגיל הזה הוא כמובן דוגמא פרטית לאלגוריתם כללי לחשב בסיס לחיתוך.

א. יהיו $v_1=(1,0,1,0), v_2=(0,2,1,1), v_3=(1,2,1,2)$ ויהיה $u=(x,y,z,w)$. מצא תנאים על x,y,z,w (מערכת משוואות לינאריות) כך ש u יהיה שייך ל Span של v_1,v_2,v_3.

פתרון:

באופן כללי, $b\in Span\{v_1,v_2,v_3\}$ אם ורק אם קיים פתרון למערכת $Ax=b$ עבור $A=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$ (מטריצה שעמודותיה הן $\{v_1,v_2,v_3\}$). זאת מכיוון ש Ax הוא צירוף לינארי של עמודות A עם הסקלרים מהוקטור x.

נבדוק מתי יש למערכת הנ"ל פתרון (נסתכל על התרגיל כמערכת פרמטרית עם 4 פרמטרים).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \\ -1 & 1 & 2 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z-x \\ 0 & 2 & 2 & w+x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-2z+2x \\ 0 & 1 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & w+x-2z+2x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & y-2z+2x \\ 0 & 0 & 0 & w-2z+3x \end{array}\right)$$

ולכן יש פתרון למערכת אם ורק אם מתקיימות 2 המשוואות $y-2z+2x=0$ ו $w-2z+3x=0$ (אחרת יש שורת סתירה).

ב. פתור את מערכת המשוואות שמצאת בסעיף א' על מנת לקבל וקטור כללי ב $Span\{v_1,v_2,v_3\}$ (הוא וקטור הפתרון הכללי כמובן).

פתרון:

קיבלנו את המערכת ההומוגנית $\begin{cases} y-2z+2x=0 \\ w-2z+3x=0 \end{cases}$ נפתור אותה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

ולכן הפתרון למערכת הוא מהצורה $b=(\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}s,\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}s,t,s)$ כלומר וקטור ששייך ל $Span\{v_1,v_2,v_3\}$ הוא מהצורה הנ"ל. ולכן

$$Span\{v_1,v_2,v_3\}=\left\{(\frac{2}{3}t+\frac{4}{3}s,\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}s,t,s)\mid s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

נחשב בסיס (אפילו שזה לא חלק מהשאלה):

$b=\frac{1}{3}(2t+4s,2t+2s,3t,3s)=\frac{t}{3}(2,2,3,0)+\frac{s}{3}(4,2,0,3)$ כלומר כל וקטור בspan הוא צירוף ליניארי של $\{(2,2,3,0),(4,2,0,3)\}$. קל לראות שוקטורים אלה הם בת"ל מכיוון שצירוף ליניארי שלהם שמתאפס מכריח $t=s=0$. לכן זו קבוצה פורשת ובת"ל כלומר בסיס.

ג. מצא מערכת משוואות דומה לסעיף א' עבור

$w_1=(1,1,0,0),w_2=(0,1,1,0),w_3=(0,0,1,1)$

פתרון:

נפתור מערכת פרמטרית כמו בסעיף א':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y+x \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & z-y+x \\ 0 & 0 & 0 & w-z+y-x \end{array}\right)$$

לכן מערכת המשוואות הינה המשוואה $w-z+y-x=0$

ד. נסמן $V=span\{v_1,v_2,v_3\},W=span\{w_1,w_2,w_3\}$ עבור הוקטורים מהסעיפים הקודמים. הוכח: $u\in V\cap W$ אם"ם u מקיים את מערכת המשוואות שמכילה את כל המשוואות מסעיף א' **וגם** מסעיף ג'.

הוכחה:

$u \in V \cap W$ אם"ם $u \in V$ וגם $u \in W$ אם"ם הוא מקיים את מערכת המשוואות מסעיף א' וגם את מערכת המשוואות מסעיף ג' (הרי הראנו שוקטור הוא פתרון של מערכת המשוואות אם"ם הוא נמצא בspan) אם"ם הוא מקיים את המערכת שמכילה את כל המשוואות.

ה. מצא בסיס ל $V \cap W$ באמצעות פתרון המערכת מהסעיף הקודם.

פתרון:

וקטור בחיתוך הוא וקטור שמקיים את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y-2z+2x=0 \\ w-2z+3x=0 \\ w-z+y-x=0 \end{cases}$$

נמצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת (הרי הוא שווה ל $V \cap W$ לפי הסעיף הקודם).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

פתרון כללי למערכת הוא מהצורה $(t, 2t, 2t, t)$ ולכן בסיס לחיתוך הוא $(1,2,2,1)$

שאלה 3

יהי $\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים מדרגה קטנה או שווה ל3. יהיו בסיסים סדורים

$B=\{1,1+x,1+x^2,1+x^3\},C=\{1+x,1-x,x^2-x^3,x^2+x^3\}$ (הסדר משמאל לימין)

א. מצא את $p(0)$ אם נתון $[p]_B=\begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \\ -2a \end{pmatrix}$

ב. מצא את $\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_B, \left[5+x-7x^2+2x^3\right]_C$

ג. מצא את $\left[1+x^2\right]_C$

ד. מצא את מטריצות המעבר $[I]_B^C,[I]_C^B$

א. $p(x)=a+b(1+x)+(a-b)(1+x^2)-2a(1+x^3)$ לכן

$p(0)=a+b+(a-b)-2a=0$

ב. $\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_B=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left[5+x-7x^2+2x^3\right]_C=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$

ג. $\left[1+x^2\right]_C=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

ד. $[I]_C^B=[I]_C^S[I]_S^B=\left([I]_S^C\right)^{-1}[I]_S^B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$[I]_B^C=\left([I]_C^B\right)^{-1}$

שאלה 5

יהי V מ"ו ויהיו $U,W \subseteq V$ נניח $U \cap W = \{0\}$ ונניח $\dim U + \dim W = \dim V$.

הוכח/הפרך: $U \oplus W = V$

הוכחה:

משפט המימדים ביחד עם הנתון מביא למסקנה הבאה:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W + \dim(U \cap W) = \dim V$$

ולכן $U+W=V$ ביחד עם העובדה שהחיתוך הוא אפס, זה אכן סכום ישר.

שאלה 6

יהיו $U_1,U_2,U_3 \subseteq V$ תתי מרחבים המקיימים $\dim U_2 < \dim U_3$ וגם $U_1+U_2=U_1+U_3$

האם $\dim\left(U_1 \cap U_2\right)$ קטן גדול או שווה ל $\dim\left(U_1 \cap U_3\right)$

נתון כי $U_1+U_2=U_1+U_3$. נפעיל את משפט המימדים על שני האגפים:

$$\dim(U_1)+\dim(U_2)-\dim(U_1 \cap U_2)=\dim(U_1)+\dim(U_3)-\dim(U_1 \cap U_3)$$ ולכן

$$\dim(U_1 \cap U_3)-\dim(U_1 \cap U_2)=\dim(U_3)-\dim(U_2)$$ ולכן

$$\dim(U_2)<\dim(U_3) \Rightarrow \underline{\dim(U_1 \cap U_2)<\dim(U_1 \cap U_3)}.$$

שאלה 7

תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ויהי מספר שלם k עבורו $A^k=0, A^{k-1}\neq 0$.

א. הוכח כי קיים $v\in\mathbb{R}^n$ כך ש $A^{k-1}v\neq 0$

ב. עבור v מהסעיף הקודם, הוכח כי הקבוצה $\{v, Av, A^2v, ..., A^{k-1}v\}$ בת"ל

ג. הוכח כי $A^n=0$

יהא k המספר הקטן ביותר שעבורו $A^k=0$ (לכן $A^{k-1}\neq 0$). קיים v עבורו $A^{k-1}v\neq 0$ (למשל ניקח את $v=e_i$ כאשר $C_i(A)\neq 0$). נתבונן בקבוצה $\{v, Av, A^2v, ..., A^{k-1}v\}$. נוכיח שהיא בת"ל:
נניח בשלילה כי הקבוצה ת"ל כלומר קיים צירוף $\alpha_1v+\alpha_2Av+...+\alpha_kA^{k-1}v=0$ שאיננו טריוויאלי.
נכפיל את שני האגפים ב A^{k-1} ומה שיישאר (לאחר שיתאפסו כמעט כל האיברים כיוון ש: $A^k=0$) זה $\alpha_1A^{k-1}v=0$, ומהנתון מקבלים $\alpha_1=0$.
כעת נתבונן בצ"ל החדש: $\alpha_2Av+...+\alpha_kA^{k-1}v=0$. נכפיל את כל הצירוף ב A^{k-2} ונקבל $\alpha_2=0$ וכן הלאה עד שנאפס את כל המקדמים.
לכן הצירוף הלינארי היחיד שמתאפס הוא הטריוויאלי, ולכן הקבוצה אכן בת"ל כפי שרצינו.
כעת, כיוון שקבוצה זו פורשת תת מרחב של F^n (כי כל איבר בה הוא וקטור מאורך n), לא יתכן שבקבוצה יש יותר מ-n איברים, כלומר: $k-1\leq n-1$ $k\leq n \Leftarrow$ $A^n=0$.

שאלה 8

תהיינה $A,B\in F^{n\times n}$ מטריצות כך ש $C(B)\cap N(A)=\{0\}$.

הוכיחו כי $rank(B)\leq rank(A)$

הוכחה: כיוון ש $C(B)+N(A)\subseteq F^n$ ובעזרת משפט המימדים והנתון, נובע כי

$$\dim C(B)+\dim N(A)=\dim\left(C(B)+N(A)\right)\leq n$$

אבל לפי הקשר בין מימדי מרחבי המטריצה לדרגת המטריצה אנו מקבלים:

$$rank(B)+n-rank(A)\leq n$$

ולכן $rank(B)\leq rank(A)$

שאלה 9

תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $rank(A)=rank(B)=2$. הוכיחו כי $A\cdot B\neq0$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $AB=0$

לכן $N(A)\supseteq C(B)$ (לפי כפל עמודה עמודה)

ולכן $rank(B)=\dim C(B)\leq\dim N(A)=3-rank(A)=1$

בסתירה.