מבחן דמה – חדו"א 1 למורים

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(e^x\ln(1+2x)\right)\cdot\cos(x+1)}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(e^x\ln(1+2x)\right)\cdot\cos(x+1)}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(e^x\ln(1+2x)\right)}{e^x\ln(1+2x)}\cdot e^x\cdot\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2\cdot\frac{x}{\sin(x)}\cdot\cos(x+1)=$$

$$=1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot\cos(1)=2\cos(1)$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ln(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

כעת $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ ולכן סה"כ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot 2=0$.

ג. $$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{2^{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{2^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{2^n}\right)^n\overset{0^\infty}{=}0$$

2. תהי סדרה חיובית a_n ויהי קבוע $2 < d \in \mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $d \le \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

כמו כן, נתון כי $a_1 < a_2$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

לפי הנתון לכל n מתקיים $2 < d \le \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$. נכפול במכנה (נתון שהסדרה חיובית) ונקבל כי $2a_{n+1} < a_n + a_{n+2}$

נעביר אגף ונקבל כי $a_{n+1} - a_n < a_{n+2} - a_{n+1}$.

כעת נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $a_{n+1} - a_n > 0$.

עבור $n = 1$, אכן נתון כי $a_2 - a_1 > 0$.

יהי n עבורו $a_{n+1} - a_n > 0$ צריך להוכיח כי $a_{n+2} - a_{n+1} > 0$ וזה נכון כי $a_{n+1} - a_n < a_{n+2} - a_{n+1}$.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

נניח כי הסדרה חסומה, לכן כיוון שהיא מונוטונית עולה וחסומה היא מתכנסת לגבול סופי $a_n \to L \in \mathbb{R}$.

כיוון שהסדרה מונוטונית עולה, והאיבר הראשון $0 < a_1$ גם $L > 0$

כיוון שלכל n מתקיים $d \le \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}$, לכן גם הגבול מקיים $d \le \frac{L + L}{L} = 2$

שימו לב שהיה לנו מותר לצמצם את L כיוון ש $0 \ne L \in \mathbb{R}$. אם $L = 0$ או $L = \infty$ היינו מקבלים מקרה בעייתי.

קיבלנו $d \le 2$ בסתירה לנתונים, ולכן הסדרה אינה חסומה.

כיוון שהסדרה מונוטונית עולה ואינה חסומה מתקיים כי $a_n \to \infty$.

3. תהיינה g,h גזירות ב $x=0$, ונביט בפונקציה $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\ge 0 \\ h(x) & x<0 \end{cases}$.

א. הוכיחו/הפריכו: f רציפה ב $x=0$ אם ורק אם $h(0)=g(0)$.

<u>בכיוון ראשון</u>: נניח כי f רציפה ב $x=0$.

לכן $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

לכן $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\mathrm{g}(0)$

המעבר האחרון נכון כיוון ש g גזירה ב $x=0$ ולכן רציפה שם.

באופן דומה, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=h(0)$.

סה"כ קיבלנו כי $f(0)=h(0)=g(0)$.

<u>בכיוון שני</u>: נניח כי $h(0)=g(0)$.

שוב $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\mathrm{g}(0)$ ובאופן דומה $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=h(0)$

כיוון שהגבולות החד צדדיים שווים, נובע כי $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=h(0)=\mathrm{g}(0)$.

לפי הגדרת הפונקציה מתקיים כי $f(0)=g(0)$, ולכן סה"כ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, כלומר f רציפה ב $x=0$.

ב. הוכיחו/הפריכו: f גזירה ב $x=0$ אם ורק אם $h'(0)=g'(0)$.

הפרכה: נבחר $h(x)\equiv 1, g(x)\equiv 2$ הפונקציה $f(x)$ אינה רציפה בכלל ב $x=0$ ולכן אינה גזירה, אך $h'(0)=g'(0)=0$.

4.

א. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=e^{-x}+e^{x}$ יש מינימום גלובאלי, ומצאו אותו.

ראשית נגזור את הפונקציה $f'(x)=-e^{-x}+e^{x}=e^{x}\left(1-e^{-2x}\right)$.

קל לראות שעבור $x>0$ מתקיים כי $f'(x)>0$ ועבור $x<0$ מתקיים $f'(x)<0$ (למי שלא קל לראות את זה, אפשר להיעזר בשיטת הטבלה).

כלומר f יורדת עד $x=0$ ועולה אחריו, כלומר לכל $x<0$ מתקיים כי $f(x)>f(0)$ ולכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)>f(0)$ כלומר $x=0$ נק' מינימום גלובאלית.

הערך המינימלי של f הוא $f(0)=2$.

ב. הוכיחו כי לכל $a\in\mathbb{R}$ למשוואה $e^{x}-e^{-x}=a$ **קיים** פתרון **יחיד**.

יהי $a\in\mathbb{R}$ נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=e^{x}-e^{-x}-a$

נגזור, ונקבל כי $h'(x)=e^{x}+e^{-x}\geq 2$ לפי סעיף א', לכן הפונקציה $h(x)$ עולה ממש ולא יכולה לחתוך את הציר יותר מפעם אחת.

כעת נחשב את הגבולות

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}e^{x}-e^{-x}-a=\infty-0-a=\infty$$

$$\lim_{x\to(-\infty)}h(x)=\lim_{x\to(-\infty)}e^{x}-e^{-x}-a=0-\infty-a=-\infty$$

לכן הפונקציה הרציפה h מחליפה סימן ולפי משפט ערך הביניים חותכת את ציר x לפחות פעם אחת.

ביחד סה"כ הפונקציה חותכת את הציר בדיוק פעם אחת.

.5

א. תהיינה שתי פונקציות f,g הגזירות בקטע A, כך ש $\forall x\in A: f'(x)=g'(x)$.

כמו כן, נתון כי קיימת נק' $a\in A$ עבורה $f(a)=g(a)$.

הוכיחו כי $\forall x\in A: f(x)=g(x)$.

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$.

נגזור את הפונקציה ונקבל כי $\forall x\in A: h'(x)=0$, נוכיח כי $h(x)$ קבועה בקטע.

תהיינה $x_1<x_2\in A$ נפעיל משפט לגראנז' על הפונקציה הגזירה (ולכן רציפה) $h(x)$ בקטע $[x_1,x_2]$

ונקבל כי קיימת נקודה c עבורה $h'(c)=\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}$.

כיוון ש $h'(c)=0$ נובע כי $h(x_1)=h(x_2)$.

(שימו לב – בעצם הוכחנו כאן משפט כללי, פונקציה בעלת נגזרת שכולה שווה 0 חייבת להיות קבועה).

לבסוף, נציב $h(a)=f(a)-h(a)=0$ ולכן $h(x)\equiv 0$ כלומר $\forall x\in A: f(x)=g(x)$.

ב. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

תזכורת: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}$

בקטע $A=(0,\infty)$ הפונקציה h גזירה ומתקיים כי $h'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}=0$.

לכן בדומה לסעיף א', $h(x)$ פונקציה קבועה.

נציב $h(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=0$ ולכן הפונקציה $h(x)=0$ לכל $x\in A=(0,\infty)$

<u>שימו לב</u>: הפונקציה אינה גזירה בכל הממשיים (אינה מוגדרת באפס), ולכן התוצאה נכונה עבור החיוביים בלבד.
ניתן באופן דומה להראות כי בשליליים מקבלים תוצאה דומה רק עבור הערך השלילי.