

23.02.20 – מועד א' תש"ף – 89-132 אינפי 1 מדמ"ח

מרצים: מר אלעד עטייא, דר' ארז שיינר

מתרגלים: ניקול בלשוב, טל הרשקו, אמונה ליפסקר, עקיבה מלכה, דורון פרלמן

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות: יש לענות על כל 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.

יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.

כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x^2 - \ln(x)}$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{ג. } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x}) \sin(x)$$

- א. תהינה $\emptyset \neq S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות חסומות מלעיל. הוכיחו כי $\sup(S) \leq \sup(T)$.
- ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-1,1]$. הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $f(c) = \frac{c}{1-c^2}$.

3. לכל אחד מן הטורים הבאים קבעו אם הוא מתכנס בהחלט/ בתנאי/ מתבדר:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

ב.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^{\sqrt{n}})}$$

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

- א. מצאו קבוע $a \in \mathbb{R}$ עבורו למשוואה $e^x = x + a$ יש פתרון יחיד, הוכיחו תשובתכם.
- ב. הוכיחו/הפריכו: לכל פונקציה $f(x)$ הרציפה בכל \mathbb{R} קיים פתרון למשוואה $f(f(x)) = x$.

5. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}$, ותנאי ההתחלה $a_1 = 1$.

א. הוכיחו כי תתי הסדרות a_{2n+1}, a_{2n+2} הן מונוטוניות.

ב. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת לגבול סופי.

