פתרון מבחן מועד א – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 05/02/19

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}\right)e^{\sin(7x)}}{\left(1-\cos(5x)\right)^5}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}\right)e^{\sin(7x)}}{\left(1-\cos(5x)\right)^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^{10}\right)}{x^{10}}\cdot\left(\frac{(5x)^2}{1-\cos(5x)}\right)^5\cdot\frac{1}{5^{10}}\cdot e^{\sin(7x)}=1\cdot 2^5\cdot\frac{1}{5^{10}}\cdot 1$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}$

חסומה חלקי אינסוף = אפיסה.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}=0$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$

ראשית נחשב את גבול המנה של הסדרה החיובית:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{\left(n!\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\infty\cdot\frac{1}{e}=\infty$$

כעת כיוון שגבול המנה גדול מאחד, נובע שהסדרה המקורית שואפת לאינסוף:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}=\infty$$

.2

א.   חשבו את $\int \frac{2x^3+4x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x-1\right)}dx$.

ראשית, כיוון שדרגת המונה גדולה או שווה לדרגת המכנה, נבצע חילוק פולינומים:

$$\frac{2x^3+4x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x-1\right)}=\frac{2x^3+4x+2}{x^3-x^2-x+1}=2+\frac{2x^2+6x}{\left(x^2-1\right)\left(x-1\right)}$$

כעת נבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{2x^2+6x}{\left(x^2-1\right)\left(x-1\right)}=\frac{2x^2+6x}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)^2}=-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{4}{\left(x-1\right)^2}$$

לכן סה"כ נקבל:

$$\int \frac{2x^3+4x+2}{\left(x^2-1\right)\left(x-1\right)}dx=2x-\ln|x+1|+3\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$$

ב.   חשבו את האינטגרל הבא $\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$.

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx=\left\{\begin{matrix} u=\arctan(x) \\ du=\frac{1}{1+x^2}dx \end{matrix}\right\}=\lim_{t\to\infty}\int_0^{\arctan(t)} u\,dx=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\arctan(t)\right)^2}{2}=\frac{\pi^2}{8}$$

.3

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x - x = 1$.

נעביר אגף ונבדוק מתי הפונקציה $h(x) = e^x - x - 1$ מתאפסת.

הנגזרת $h'(x) = e^x - 1$ חיובית עבור $x > 0$ ושלילית עבור $x < 0$.

לכן לכל $x > 0$ מתקיים כי $h(x) > h(0)$ כיוון שהפונקציה עולה ממש,

ולכל $x < 0$ מתקיים כי $h(x) > h(0)$ כיוון שהפונקציה יורדת ממש.

כעת $h(0) = 0$ ולכן סה"כ יש בדיוק נקודת חיתוך אחת עם הציר.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x = x + \frac{x^2}{2}$.

נעביר אגף ונבדוק מתי הפונקציה $g(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2}$ מתאפסת.

הנגזרת $g'(x) = h(x)$ היא בעצם הפונקציה מהסעיף הקודם, בו הוכחנו שהיא תמיד אי שלילית
$g'(x) = h(x) \geq 0$ והיא מתאפסת רק באפס, ולכן $g(x)$ עולה ממש.

לכן יש <u>לכל היותר</u> נקודת חיתוך אחת עם הציר.

נציב $g(0) = 1$, ולכן יש נקודה מעל הציר. כיוון שמדובר בצירוף של פונקציות אלמנטריות זו פונקציה רציפה.
מספיק למצוא נקודה מתחת לציר, ואז לפי משפט ערך הביניים <u>קיים</u> חיתוך עם הציר.

נציב $g(-1) = \frac{1}{e} - 1 - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ ולכן סה"כ יש חיתוך יחיד עם הציר.

(אפשר היה לחשב גבולות באינסוף ומינוס אינסוף במקום להציב נקודות)

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים.

א. נניח כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ הוכיחו/הפריכו $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

הפרכה:

נביט בפונקציה $f(x)=\frac{\sin\left(e^{2x}\right)}{e^x}$.

ראשית $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ כיוון שמדובר בחסומה חלקי אינסוף.

כעת $f'(x)=\frac{2e^{2x}\sin\left(e^{2x}\right)e^x-e^x\sin\left(e^{2x}\right)}{e^{2x}}=2e^x\sin\left(e^{2x}\right)-\frac{\sin\left(e^{2x}\right)}{e^x}$

קל לבחור סדרות שונות השואפות לאינסוף עבורן הנגזרת שואפת לאפס, או לאינסוף, לכן גבול הנגזרת כלל אינו קיים, ובוודאי אינו אפס.

<u>הערה</u>: היה ניתן להשתמש בפונקציה $\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}$ מסעיף ב' של שאלה 1, אך היה צריך לטפל בעובדה שאינה גזירה באפס.

למשל, אפשר לתקן שם את אי הרציפות הסליקה ולהוכיח שהפונקציה החדשה גם גזירה באפס.

ב. נניח כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=2$ הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

ישנן מספר שיטות לפתור את התרגיל, נציג כאן דרך אחת.

כיוון ש $\lim_{x\to\infty} f'(x)=2$, החל משלב מסויים מתקיים כי $f'(x)>1$.

נבחר נקודה x_0 בתחום הזה.

נביט בפונקציה $h(x)=f(x)-\left(x-x_0\right)-f\left(x_0\right)$

זה בעצם ההפרש בין הפונקציה לבין ישר בשיפוע 1 שחותך את הפונקציה ב x_0.

כעת $h(x_0)=0$ וכמו כן $h'(x)=f'(x)-1>0$ בתחום.

כלומר הפונקציה עולה ממש, ולכן לכל $x>x_0$ מתקיים כי $h(x)>h(x_0)=0$.

כלומר לכל $x>x_0$ מתקיים כי $f(x)>x-x_0+f(x_0)$.

צד ימין שואף לאינסוף, ולכן לפי חצי סנדוויץ' גם $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5. חשבו את הגבולות של שתי הסדרות הבאות, הנתונות על ידי כללי נסיגה:

א. $a_{n+1} = a_n \cdot e^{a_n}$, כאשר $a_1 > 0$.

ראשית נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חיובית.

אכן $a_1 > 0$ ואם $a_n > 0$ אזי $a_{n+1} = a_n \cdot e^{a_n} > 0$.

כעת $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{a_n} > 1$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה.

נב"ש שהסדרה חסומה ויש לה גבול סופי $a_n \to L$.

נחשב את הגבולות $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot e^{a_n}$ ולכן $L = Le^L$.

לכן $L(1-e^L) = 0$ ולכן $L = 0$ בסתירה לכך ש $L \geq a_1 > 0$ כיוון שהסדרה מונוטונית עולה.

לכן הסדרה אינה חסומה, וכיוון שהיא מונוטונית עולה היא שואפת לאינסוף $a_n \to \infty$.

ב. $a_{n+1} = a_n \cdot e^{-a_n}$, כאשר $a_1 > 0$.

בדומה לסעיף א', קל להוכיח שמדובר בסדרה חיובית.

לכן $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-a_n} < 1$ ומדובר בסדרה מונוטונית יורדת.

כיוון שהסדרה חיובית, נובע שהיא חסומה מלרע ע"י אפס.

כלומר מדובר בסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול סופי $a_n \to L$.

נחשב את הגבולות $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot e^{a_n}$ ונקבל $L = Le^{-L}$.

לכן $L(1-e^{-L}) = 0$ ולכן $L = 0$ כלומר הוכחנו כי $a_n \to 0$.

.6

א.   חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k}$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt[n]{e^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot e^{\left(\frac{k}{n}\right)}$$

כלומר זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x)=xe^x$ בקטע $[0,1]$ על החלוקות $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right\}$ עם בחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n}{n}\right\}$. פרמטר החלוקות הינו $\frac{1}{n}$.

כיוון שהפונקציה רציפה בקטע הסגור היא אינטגרבילית, וכיוון שפרמטר החלוקה שואף לאפס סדרת סכומי הרימן שואפת לאינטגרל:

$$a_n\to\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x-e^x\right]_0^1=1$$

ב.   הוכיחו כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $\left|\sin(x)-x\right|\le\frac{|x|^3}{6}$.

נחשב פולינום טיילור מסדר 2 של הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ סביב הנקודה המצוייה 0 בנקודה רצוייה x כללית.

נקבל $P_2(\sin(x),0,x)=x$.

כעת השגיאה היא $f(x)-P_2=\sin(x)-x=\frac{f'''(c)}{3!}x^3=\frac{-\cos(c)}{3!}x^3$

ביחד

$$\left|\sin(x)-x\right|=\left|\frac{-\cos(c)}{3!}x^3\right|\le\left|\frac{x^3}{3!}\right|$$