המשך פונקציות סתומות

ראינו שיעור שעבר כי אם

1. $f\left(\vec{p}\right)=0$
2. $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\left(p\right)\right|_{i=1,...n}\neq 0$

אז קיימת סביבה של נקודה cv $a=\left(a_1,...a_n\right)$ ניתן להציג את $y_1,...y_n$ כפונקציות סתומות של $x_1,...x_m$

ז"א $y_j=g_j\left(x_1,...x_m\right)$

ובנוסף מתקיים $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\cdot\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)^{-1}=-\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\left(a\right)\right)_{\substack{i=1,...n\\ j=1,...m}}$

דוגמה 1

תהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f=\left(f_1,f_2\right)$ עבור

$$f_1\left(x,y,z\right)=x^2+\frac{1}{2}y^2+z^3-z^2-\frac{3}{2}$$

$$f_2\left(x,y,z\right)=x^3+y^3-3y+z+3$$

הראו שניתן להציג את y,z כפונקציה של x. כלומר $y=g_1\left(x\right),z=g_2\left(x\right)$ סביב הנקודה $\left(-1,1,0\right)$

פתרון

תחילה נבדוק שתמקיים $f\left(\vec{p}\right)=0$:

$$f=\left(f_1\left(-1,+1,0\right),f_2\left(-1,1,0\right)\right)=\left(0,0\right)$$

ברור שf וכל נגזרותיה החלקיות רציפות(כי מדובר על פולינום)
נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f'_{1x}=2x,f'_{1y}=y,f'_{1z}=3z^2-2z$$

$$f'_{2x}=3x^2,f'_{2y}=3y^2-3,f'_{2z}=1$$

(קל לראות $f\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$)
נחשב את הדטרמיננטה הרצויה:
רוצים y וz כפונקציה של x ולכן:

$$\begin{vmatrix}f'_{1y}\left(-1,1,0\right) & f'_{1z}\left(-1,1,0\right)\\ f'_{2y}\left(-1,1,0\right) & f'_{2z}\left(-1,1,0\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3\cdot 0^2-2\cdot 0\\ 3\cdot 1^2-3 & \end{vmatrix}=1\neq 0$$

ולכן לפי משפט הפונקציה הסתומה ניתן להציג את y,z כפונקציה של x, כלומר $z=g_2\left(x\right)$, $y=g_1\left(x\right)$ בסביבת הנקודה $\left(-1,1,0\right)$.

דוגמה 2

תהי $f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=\left(x_1y_2+x_2y_1-1,x_1x_2-y_1y_2\right)$

(א) הוכיחו כי המשוואה $f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=(0,0)$ מגדירה את y_1,y_2 כפונקציה סתומה של x_1,x_2 בסביבת הנקודה $p=(1,0,0,1)$

(ב) חשבו את $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}(a)$, $1\leq i,j\leq 2$ עבור $a=(1,0)$

פתרון

נראה כי מתקיימים הקריטריונים למשפט:

I נבדוק ש-$f\left(\vec{p}\right)=\vec{0}$, ז"א

$$f\left(\vec{p}\right)=f\left(1,0,0,1\right)=\left(1\cdot 1+0-1,0-0\right)=(0,0)\,\checkmark$$

נמצא נגזרות חלקיות:

$$f'_{x_1}=\left(y_2,x_2\right)\quad f'_{x_2}=\left(y_1,x_1\right)$$

$$f'_{y_1}=\left(x_2,-y_2\right)\quad f'_{y_2}=\left(x_1,-y_1\right)$$

ברור כי כל הנגזרות הלחקיות רציפות ו-$f\in C^1$. נשאר לבדוק את הדטרמיננטה הדרושה:

לפי המשפט נבחר רק את הנגזרות של y_1 ו-y_2, נסמן

$$f'_{y_1}=\left(f'_{1y_1},f'_{2y_1}\right)$$

באופן דומה

$$f'_{y_2}=\left(f'_{1y_2},f'_{2y_2}\right)$$

נרשום זאת במטריצה

$$\begin{vmatrix} f'_{1y_1}\left(\vec{p}\right) & f'_{1y_2}\left(\vec{p}\right) \\ f'_{2y_1}\left(\vec{p}\right) & f'_{2y_2}\left(\vec{p}\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

לכן ע"פ משפט הפונקציה הסתומה קיימת סביבה לנקודה $\vec{p}$ בה המשוואה $f\left(x_1,x_2,y_1,y_2\right)=0$ מגדירה את y_1 ו-y_2 כפונקציה סתומה של x_1,x_2

(ב) נעזר בחלק האחרון של המשפט. תזכורת:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

נמצא כל אחת מהמטריצות בנפרד(שבצד ימין של המשוואה)

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\vec{p})\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\vec{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

נמצא את המטריצה ההופכית(נשים מינוס לפני)

$$-A^{-1}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

נציב את הנקודה $(1,0,0,1)$ ב

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

נקבל

$$-A^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן נסיק⇐

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

נשווה רכיבים ונקבל:

$$\begin{matrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0 & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}=1\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}=-1 & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=0\end{matrix}$$

שזוהי אכן ההצגה המבוקשת!

דוגמה

הוכיחו כי המשוואה $u^3+2u+e^{4-x-y^2}=\cos\left(x^2+u\right)$ מגדירה את u כפונקציה סתומה של x,y בכל המישור(ז"א לכל x וy). הראו שy הנ"ל גזירה ורציפה ז"א $u\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ בכל המישור ומתאפסת ב$(0,0)$

פתרון

נעביר אגף ונקבל $u^3+2u+e^{4-x-y^2}-\cos\left(x^2+u\right)=0$ ולכן נגדיר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ על ידי הפונקציה

$$f\left(x,y,u\right)=u^3+2+e^{4-x-y^2}-\cos\left(x^2+u\right)=0$$

ניקח נקודה $\vec{p}=\left(x_0,y_0,u_0\right)$ כך ש$f\left(\vec{p}\right)=0$. נגזור את f לפי x, y וu

$$f'_x=-e^{4-x^2-y^2}+2x\sin\left(x^2+u\right)$$

$$f'_y=-2ye^{4-x-y^2}$$

$$f'_u=3u^2+2+e^{4-x-y^2}+\sin\left(x^2+u\right)$$

ברור כי f, f'_x, f'_y וf'_u רציפות ולכן $f\in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$. נשאר לבדוק את התנאי האחרון למשפט: נגזור לפי פרמטר u

$$f'_u\left(\vec{p}\right)=3u^2+d+e^{4-x-y^2}+\sin\left(x^2+u\right)$$

קל לראות ☺ כי

$$f'_y\left(p\right)>0$$

$$e^{4-x-y^2}>0,3u^2>0$$

$$-1\le\sin\left(x^2+u\right)\le1\Rightarrow1\le2+\sin\left(x^2+u\right)\le3$$

אם $f'_u\left(\vec{p}\right)>0$ בפרט $f'_u\left(\vec{p}\right)\neq0$
ולכן לפי משפט הפונקציה הסתומה u מוגדרת להיות פונקציה לכל x_0 וy_0(ז"א לכל נקודה במישור).
נוסיף כי כדי להראות שu גזירה ונגזרתה רציפה ניתן להשתמש במשפט, או לגזור את המשוואה

$$u^3+2u+e^{u-x-y^2}-\cos\left(x^2+u\right)=0$$

אם נגזורת את המשוואה המקורית כפונקציה סתומה, כאשר נגזור לפי x:
אנו יודעים שu היא פונקציה של x!!!

$$3u^2\cdot u'_x+2u'_x+\left(u'_x-1\right)\cdot e^{4-x-y^2}+\left(2x+u'_x\right)\sin\left(x^2+u\right)=0$$

נבודד את u_x':

$$u_x' = \frac{e^{4-x-y^2} - 2x\sin\left(x^2+u\right)}{3u^2+2+e^{u-x^2-y^2}+\sin\left(x^2+u\right)}$$

המכנה שלנו הוא בעצם f_u' וראינו כבר שהוא אינו מתאפס. כל שאר הפונקציות בביטוי הן רציפות ולכן כהרכבה של פונקציות רציפות u_x רציפה!!
באופן דומה אפשר להראות שu_y' רציפה. ולכן u גזירה ונגזרתה רציפה.

ביקשו בנוסף להראות שu מתאפסת ב$(0,0)$, כלומר $u\left(0,0\right)=0$. לאחר שנציב במשוואה המקורית $x=0, y=0$ ו$u=0$ קל לראות שנקבל פסוק אמת, כלומר

$$0^3+2\cdot 0+e^{0-0-0^2}=\cos\left(0+0^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1=1$$

פסוק אמת.