תרגיל בית 9 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1. קבעו האם הפולינומים הבאים הם אי פריקים בחוג הנתון, ואם הם פריקים מצאו את פירוק שלהם לגורמים אי פריקים.

1. x^2+x+1 בחוג $\mathbb{F}_2[x]$.
2. $x^6-4x^4+6x^2$ בחוג $\mathbb{Z}[x]$.
3. $2ix^5+71$ בחוג $\mathbb{Z}[i][x]$.
4. x^2+y^2-1 בחוג $\mathbb{Q}[x,y]$. העשרה: x^n+y^m-1 לכל $n,m\in\mathbb{N}$.

שאלה 2. יהי $f(x)=x^4-5x^2+6$. פרקו את $f(x)$ לגורמים ראשוניים מעל החוגים הבאים:

א. $\mathbb{Q}$

ב. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

ג. $\mathbb{R}$

ד. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

שאלה 3. יהי p מספר ראשוני. הראו שהפולינום $f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}$ הוא אי פריק מעל $\mathbb{Q}$. רמז: הסתכלו על $f(x+1)$.

שאלה 4. נתבונן בפולינום $f(x)=x^2+4$ מעל $\mathbb{Z}$. הראו ש-$f(ax+b)$ לא מקיים את קריטריון אייזנשטיין לכל $a,b\in\mathbb{Z}$, $a\neq 0$, למרות ש-$f(x)$ אי פריק.

שאלה 5. יהי R תחום פריקות יחידה, ויהי $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in R[x]$.

א. הוכיחו כי f הוא אי פריק ב-$R[x]$ אם ורק אם הוא אי פריק ב-$R[x,x^{-1}]$.

ב. נניח $a_0\neq 0$, ונתבונן בפולינום $\tilde{f}(x)=a_0x^n+\ldots a_{n-1}x+a_n$ שבו הפכנו את סדר המקדמים של f. הוכיחו בעזרת הסעיף הקודם שאם $\tilde{f}$ מקיים את קריטריון אייזנשטיין, אז f אי פריק.

שאלה 6 (רשות). הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ הפולינום

$$p_n(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n) - 1$$

הוא אי פריק בחוג $\mathbb{Z}[x]$.

שאלה 7 (רשות). נתבונן באידאל $I = \left\langle 21, 9+3\sqrt{-5}, -2+4\sqrt{-5} \right\rangle \lhd \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

א. הוכיחו כי I אידאל ראשי.

ב. הוכיחו כי I לא מקסימלי. רמז: אפשר להראות כי הוא אפילו לא ראשוני.

שאלה 8 (העשרה). א. יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום פריק, ויהי p מספר ראשוני. נתבונן בהטלה $\overline{f}(x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ מודולו p של $f(x)$. הוכיחו שאם $\deg \overline{f} = \deg f$, אז $\overline{f}(x)$ פריק מעל $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שהפולינום $x^4 + 88212x^2 + x + 1$ הוא אי פריק מעל $\mathbb{Z}$.

ג. יהי פולינום $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ מדרגה לפחות 2. הוכיחו שקיים מספר ראשוני p כך ש-$\overline{g}(x)$ הוא פריק מעל $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (אפשר להוכיח שישנם אינסוף ראשוניים כאלו).

בהצלחה!