אלגברה מופשטת 3 – תרגול 6

תרגיל:

יהי $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ פולינום אי-פריק. יהי $E/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול של $f(x)$. הראו שאם $Gal(E/\mathbb{Q})=Q_8$ (חבורת הקווטרניונים) אזי בהכרח $\deg(f)\geq 8$.

פתרון: אם דרגת הפולינום קטנה מ 8, אז חבורת גלואה משוכנת ב S_i עבור איזשהו $i<8$.

נראה שלא ניתן לשכן את Q_8 ב S_7 (ואז לא ניתן לשכן את Q_8 ב $S_2,...,S_7$).

אם Q_8 תת-חבורה (או איזומורפית לתת-חבורה) של S_7 אזי היא פועלת על $A=\{1,..,7\}$.

יהי $a\in A$ אזי $|St(a)|>1 \Leftarrow |O(a)|\leq 7$ $=[Q_8:St(a)]=\dfrac{|Q_8|}{|St(a)|}$. כעת נזכר שכל תת-חבורה של Q_8 מכילה את -1, כלומר $\forall a\in A,\ -1\in St(a)$. כלומר -1 פועל בצורה טריויאלית על A, אבל אין אף איבר לא טריויאלי ב S_7 הפועל טריויאלית על A.

הגדרה: E/F היא **הרחבת גלואה** אם היא שדה פיצול של פולינום ספרבילי.

משפט 1: אם E/F הרחבת גלואה, ו $E\supseteq B\supseteq F$ תת-הרחבת גלואה אזי $Gal(E/B)$ היא תת-חבורה נורמלית, ומתקיים $Gal(B/F)\cong Gal(E/F)/Gal(E/B)$.

סימון: בהנתן שתי תת-חבורות $H_1,H_2\leq G$ נסמן $H_1\vee H_2$ להיות התת-חבורה הקטנה ביותר של G המכילה את H_1,H_2.

משפט 2: תהי E/F הרחבת גלואה, ויהיו B,C שדות ביניים (כלומר $E\supseteq B,C\supseteq F$). אזי:

1. $Gal(E/B)\vee Gal(E/C)=Gal(E/B\cap C)$
2. $Gal(E/B)\cap Gal(E/C)=Gal(E/B\vee C)$

תרגיל:

1. מכפלה של שני פולינומים מתוקנים שונים שהם אי-פריקים וספרביליים מעל F היא ספרבילית.
2. תהי $f(x)=g(x)h(x)\in F[x]$ מכפלה של שני פולינומים מתוקנים שונים אי-פריקים וספרביליים. נסמן E,B,C שדות הפיצול של $f(x),g(x),h(x)$ מעל F בהתאמה. אם $B\cap C=F$ אזי $Gal(E/F)\cong Gal(B/F)\times Gal(C/F)$.

הוכחה:

1. אם $f(x)=g(x)h(x)\in F[x]$ מכפלה של שני פולינומים מתוקנים שונים אי-פריקים וספרביליים. נניח שיש ל $f(x)$ שורש כפול, אזי בהכרח יש ל $g(x),h(x)$ שורש משותף α,

אך אזי כיוון שהם אי-פריקים, שניהם פולינומים מינימליים של α, וזה ייתכן רק אם הם שווים, בסתירה להנחות.

2. ברור שמתקיים $E=B\vee C$. לפי משפט 2 מתקיים $Gal(E/B)\vee Gal(E/C)=Gal(E/B\cap C)=Gal(E/F)$, וגם $Gal(E/B)\cap Gal(E/C)=Gal(E/B\vee C)=Gal(E/E)=\{id\}$. לפי משפט 1 מתקיים $Gal(E/B),Gal(E/C)$ הן תח"נ של $Gal(E/F)$. לכן מתקיים לפי משפט מכפלה פנימית-מכפלה חיצונית מתורת החבורות ש $Gal(E/F)\cong Gal(E/B)\times Gal(E/C)$. **שימו לב שעדיין לא פתרנו את התרגיל**.
לפי החלק השני של משפט 1, מתקיים $Gal(B/F)\cong Gal(E/F)/Gal(E/B)$. בנוסף, לפי משפט מתורת החבורות מתקיים $(G\times H)/H\cong G$ ולכן מתקיים $Gal(E/F)/Gal(E/B)\cong Gal(E/C)$. נחבר את שני השויונות, ונקבל $Gal(B/F)\cong Gal(E/C)$. בצורה דומה מקבלים $Gal(C/F)\cong Gal(E/B)$. כך נקבל את האיזומורפיזם הדרוש.

דוגמה: הראו דוגמה נגדית לחלק 2 של התרגיל האחרון במקרה ש $B\cap C\neq F$.

פתרון: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+1)$. הפולינומים המינימליים של $\sqrt{2},\sqrt{2}+1$ הם x^2-2,x^2-2x-1. אם כך $f(x)=(x^2-2)(x^2-2x-1)$ מכפלה של שני פולינומים מתוקנים שונים אי-פריקים וספרביליים ושדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

לכן בסימונים של התרגיל הקודם $\mathbb{Z}_2\cong Gal(E/F)\ncong Gal(B/F)\times Gal(C/F)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.