פתרון בוחן בדידה למדמח, 89-1195

ה' בטבת ה'תשפ"ג, 29/12/2022

מתרגלים: אריאל ויצמן, מרים כרמון.

- ענו על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. הוכיחו או הפריכו:

(א) (12 נק') לכל קבוצות A,B,C מתקיים:

$$A\times(B\triangle C)=(A\times B)\triangle(A\times C)$$

פתרון: הוכחה בהכלה דו כיוונית:

$\subseteq$: נניח $(x,y)\in A\times(B\triangle C)$, לכן לפי הגדרת זוג סדור נקבל $x\in A\wedge y\in B\triangle C$, ומהגדרת הפרש סימטרי נקבל

$$x\in A\wedge((y\in B\wedge y\notin C)\vee(y\in C\wedge y\notin B))$$

כעת נוכל לפתוח לפי חוק הפילוג ולקבל:

$$(x\in A\wedge y\in B\wedge y\notin C)\vee(x\in A\wedge y\in C\wedge y\notin B)$$

מהמקרה השמאלי נובע ש- $(x,y)\in A\times B$ (כי $x\in A\wedge y\in B$), ובנוסף $(x,y)\notin A\times C$ (כי $y\notin C$), ולכן

$$(x,y)\in(A\times B)\triangle(A\times C)$$

בדומה, מהמקרה הימני נובע ש- $(x,y)\in A\times C$ (כי $x\in A\wedge y\in C$), ובנוסף $(x,y)\notin A\times B$ (כי $y\notin B$), ולכן

$$(x,y)\in(A\times B)\triangle(A\times C)$$

$\supseteq$: נניח $(x,y)\in(A\times B)\triangle(A\times C)$. לכן, לפי הגדרת הפרש סימטרי, נקבל:

$$((x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin A\times C)\vee((x,y)\in A\times C\wedge(x,y)\notin A\times B)$$

מצד שמאל נקבל:

$$x\in A\wedge y\in B\wedge\neg(x\in A\wedge y\in C)$$

מה שאומר (לפי דה-מורגן):

$$x\in A\wedge y\in B\wedge(x\notin A\vee y\notin C)$$

מכיון ש- $x \in A \wedge x \notin A \equiv F$ נקבל (כן, אפשר להוסיף פה אסוציאטיביות של "וגם" ואת חוק הפילוג כדי ממש לראות זאת):

$$x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$$

מה שאומר לפי הגדרת הפרש סימטרי: $x \in A \wedge y \in B \triangle C$, ולכן לפי הגדרת מכפלה נקבל:

$$(x, y) \in A \times (B \triangle C)$$

באותו אופן, מצד ימין נקבל:

$$x \in A \wedge y \in C \wedge \neg(x \in A \wedge y \in B)$$

מה שאומר (לפי דה-מורגן):

$$x \in A \wedge y \in C \wedge (x \notin A \vee y \notin B)$$

מכיון ש- $x \in A \wedge x \notin A \equiv F$ נקבל (כן, אפשר להוסיף פה אסוציאטיביות של "וגם" ואת חוק הפילוג כדי ממש לראות זאת):

$$x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin B$$

מה שאומר לפי הגדרת הפרש סימטרי: $x \in A \wedge y \in B \triangle C$, ולכן לפי הגדרת מכפלה נקבל:

$$(x, y) \in A \times (B \triangle C)$$

(ב) (12 נק') לכל קבוצות B, C מתקיים:

$$B = C \iff \forall A : A \cup B = A \cup C$$

פתרון: הוכחה: תהיינה B, C קבוצות.

$\Rightarrow$: נתון: $B = C$, וצריך להוכיח שלכל קבוצה A מתקיים $A \cup B = A \cup C$: תהי A קבוצה:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B \iff x \in A \vee x \in C \iff x \in A \cup C$$

(כאשר המעבר האמצעי נובע מהנתון), ולכן $A \cup B = A \cup C$.

$\Leftarrow$: נתון: לכל קבוצה A מתקיים $A \cup B = A \cup C$, צ"ל: $B = C$. מכיון שלכל קבוצה A מתקיים $A \cup B = A \cup C$, לכן בפרט עבור $A = \emptyset$ מתקיים

$$B = \emptyset \cup B = \emptyset \cup C = C$$

וקיבלנו $B = C$.

(ג) (12 נק') לכל קבוצות B, C מתקיים:

$$B = C \iff \exists A : A \cup B = A \cup C$$

פתרון: הפרכה: נמצא שתי קבוצות B, C כך שה"אם ורק אם" לא מתקיים:

$$B = \{1\}, C = \{2\}$$

צד שמאל כמובן לא נכון, אך צד ימין כן נכון: נוכל לקחת $A = \{1, 2\}$ ועבורה נקבל:

$$A \cup B = \{1, 2\} = A \cup C$$

2. (15 נק') הוכיחו שלכל $n \geq 3$ מתקיים: סכום הזויות של מצולע קמור (כלומר, מצולע שכל זויותיו הפנימיות קטנות מ-π) עם n קודקודים הוא $(n-2) \cdot \pi$ ($\pi = 180°$). ניתן להשתמש בכך שסכום זויות משולש הוא π.

פתרון: הוכחה: באינדוקציה על $n \geq 3$:

בסיס: עבור $n = 3$ אנחנו מקבלים משולש, וסכום זויותיו כאמור הוא $\pi = (3-2) \cdot \pi$.

יהי $n \geq 3$, נניח נכונות עבור n (כלומר, שסכום זויות מצולע קמור עם n קודקודים הוא $(n-2) \cdot \pi$), ונוכיח עבור $n+1$ (כלומר, שסכום זויות מצולע קמור עם $n+1$ קודקודים הוא $(n+1-2) \cdot \pi = (n-1) \cdot \pi$):

יהי מצולע קמור עם $n+1$ קודקודים. נסמן קודקוד כלשהו ב- v_1, ונמשיך לפי כיוון השעון $v_2, \ldots, v_{n+1}$ (סתם בחרתי כיוון השעון רק כדי לסמן את כולם "אחד אחרי השני"). נמתח אלכסון בין v_1 לבין v_n, ונקבל שני מצולעים: משולש v_1, v_n, v_{n+1} שסכום זויותיו הוא π כאמור. ומצולע נוסף עם n קודקודים $v_1, \ldots, v_n$ שסכום זויותיו הוא, לפי הנחת האינדוקציה, $(n-2)\pi$. כאשר נסכום את הזויות, נוכל לפצל את הזוית הפנימית בקודקודים v_1, v_n חלקה במשולש וחלקה במצולע השני, ולכן בסה"כ סכום זויות המצולע הוא:

$$\pi + (n-2) \cdot \pi = (n-1) \cdot \pi$$

3. תהא A קבוצה. יחס R על A ייקרא יחס משולשי אם מתקיים:

$$\forall a,b,c \in A:\ (aRb \wedge bRc) \Rightarrow cRa.$$

(א) (10 נק') תנו דוגמה ליחס R משולשי שאינו יחס שקילות.

פתרון: למשל $A=\{1\}$ ו $R=\emptyset$ מקיים את התנאי $\forall a,b,c \in A:\ (aRb \wedge bRc) \Rightarrow cRa$ באופן ריק והוא אינו רפלקסיבי ולכן לא יחס שקילות.

(ב) (15 נק') הוכיחו שאם R יחס משולשי ורפלקסיבי אז הוא יחס שקילות.

פתרון:

רפלקסיביות: נתון.

סימטריות: נניח aRb, כיוון ש R רפקלסיבי גם aRa נקבל כי bRa (כיוון ש $(aRa \wedge aRb) \Rightarrow bRa$) .

טרנזיטיביות: נניח $aRb \wedge bRc$ אזי לפי נתוני השאלה cRa וכיוון שהוכחנו סימטריות זה גורר aRc כנדרש.

(ג) (15 נק') **הוכיחו/הפריכו:** אם R משולשי וטרנזיטיבי אז R סימטרי.

פתרון: הפרכה: למשל $A=\{1,2\}$ ו $R=\{(1,2)\}$ אינו סימטרי אבל הוא גם טרנזיטיבי וגם עונה על תנאי השאלה באופן ריק.

(ד) (15 נק') הוכיחו שאם R יחס משולשי וגם יחס סדר אז $R=I_A$ (כאשר $I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$ הוא יחס הזהות על A).

פתרון: אם R יחס סדר אז בפרט הוא רפלקסיבי ולכן הוא משולשי ורפלקסיבי, ולכן לפי סעיף ב הוא יחס שקילות. כלומר R הוא יחס שקילות וגם יחס סדר ולכן $R=I_A$ (לא יכול להיות aRb עבור $a\neq b$ כי לפי סימטריות (הוא יחס שקילות) גם bRa שזה סותר את את הגדרת אנטי סימטריות (כי הוא יחס סדר).