

שאלות נוספות – שונות משותפת ואי-תלות – קורס קיץ 2011שאלה 1

מטילים קוביה הוגנת n פעמים. נגדיר את המ"מ הבאים: X – מס' הפעמים שהתקבל 6, Y – מס' הפעמים שהתקבל 5. חשב את $Cov(X, Y)$.

פתרון:

חישוב ישיר הוא ארוך. ננקוט בדרך אחרת. מהנתונים ידוע כי

$$X \sim \text{Bin}(n, 1/6), Y \sim \text{Bin}(n, 1/6)$$

נרצה להשתמש בנוסחה הבאה (הנכונה תמיד ולא משנה מה הקשר בין המשתנים),

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$$

מהאדיטיביות של ההתפלגות הבינומית נקבל $X + Y \sim \text{Bin}(n, 2/6)$.

לכן נוכל לבודד את המבוקש

$$\frac{1}{2}[V(X + Y) - V(X) - V(Y)] = Cov(X, Y)$$

השונות של מ"מ בינומי נתונה ע"י $Z \sim \text{Bin}(n, p) \Rightarrow V(Z) = np(1 - p)$

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} \left[n \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} - 2 \cdot n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \right] = \frac{-n}{36}$$

שאלה 2 [מתוך בוחן אמצע סמסטר 2011 סמסטר ב', מרצה פרופ' וישנה]

בהינתן משתנים מקריים X, Y, Z נאמר כי Z מפריד את X ו- Y אם לכל ערך c

של Z , $X | Z = c$ בלתי-תלוי ב- $Y | Z = c$. הוכח כי אם Z מפריד את X

ו- Y וגם Z בלתי-תלוי ב- X אזי X בלתי-תלוי ב- Y .

פתרון:

$$P(X = a, Y = b) = \sum_{c \in \mathbb{R}} P(X = a, Y = b | Z = c) P(Z = c) =$$

$$\sum_{c \in \mathbb{R}} P(X = a | Z = c) P(Y = b | Z = c) P(Z = c) =$$

$$\sum_{c \in \mathbb{R}} P(X = a) P(Y = b | Z = c) P(Z = c) =$$

$$P(X = a) \sum_{c \in \mathbb{R}} P(Y = b | Z = c) P(Z = c) = P(X = a) P(Y = b)$$