התמרות אינטגרליות

מרצה: פרופסור לאוניד שוסטר

הוקלד ע"י ליאורה גירז'מן ורון גרשינסקי

הרצאה 9:התמרת לפלס – תכונות (המשך)

1.תמונת (פונקצית) מקור מחזורית

משפט 1.1:

תהי $f(t)$ מקור, ובנוסף הינה פונקציה מחזורית עבור $t \geq 0$ בעלת מחזור T, כלומר:

$$f(t+T)=f(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

אזי את התמונה $f(t) \to F(p)$ ניתן למצוא לפי הנוסחא:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}} \cdot \int_0^T e^{-pt} f(t)dt, \quad \operatorname{Re}(p)>0 \quad (1.2)$$

הערה: אם $f(t)$ פונקצית מקור מחזורית, אז המעריך גידול שלה שווה ל0. אכן, כפונקציה מחזורית רציפה למקוטעין היא חסומה $\Leftarrow$ $\exists M \in [1,\infty)$:

$$\left|f(t)\right| \leq M \Rightarrow s_0=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left|f(t)\right|}{t}=0.$$

הוכחת המשפט:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt=\int_0^T e^{-pt} f(t)dt+\int_T^\infty e^{-pt} f(t)dt=$$

נחליף משתנים באינטגרל השני:

$$\begin{vmatrix} t=s+t \\ s\in[0,\infty) \end{vmatrix} = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-p(s+T)} f(s+T)ds =$$

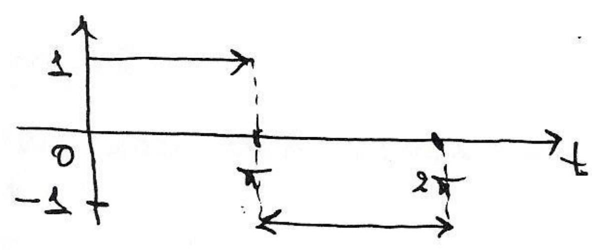
$$\left| f(s+T) = f(s),\ s\ge 0 \right| = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-pT} \underbrace{\int_0^\infty e^{-ps} f(s)ds}_{F(p)} =$$

$$= \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-pT} F(p) \Rightarrow F(p)\left[1-e^{-pT}\right] = \int_0^T e^{-pT} f(t)dt \Rightarrow (1.2)$$

תרגיל 1:

מצא את תמונת הפונקציה:

$$f(t) = \frac{\sin t}{|\sin t|}$$



פתרון:

הפונקציה מחזורית, $T=2\pi$ $\Leftarrow$ לפי (1.2) נקבל:

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \left\{ \int_0^{\pi} e^{-pt} dt - \int_\pi^{2\pi} e^{-pt} dt \right\} =$$

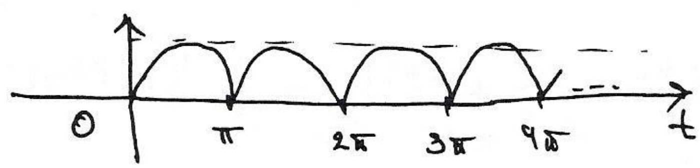
$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \left\{ \frac{1}{p}\left(1-e^{-\pi p}\right) - \frac{e^{-\pi p}}{p}\left(1-e^{-\pi p}\right) \right\} = \frac{\left(1-e^{-\pi p}\right)^2}{p\left(1-e^{-2\pi p}\right)} = \frac{1}{p}\frac{1-e^{-\pi p}}{1+e^{-\pi p}}$$

תרגיל 2:

מצא את תמונת הפונקציה: $f(t)=\left|\sin t\right|$

פתרון:

הפונקציה הינה מקור, ומחזורית עם מחזור $T=\pi$:



אזי לפי הנוסח הכללית אנו מקבלים:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt\Bigg|_{\substack{T=\pi \\ f=\left|\sin t\right|}}=\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\int_0^\pi e^{-pt}\sin t dt$$

כיוון ש $t\in[0,\pi]$ $\left|\sin t\right|=\sin t,$ $\Leftarrow$

$$J(p) := \int_0^{\pi} e^{-pt}\sin t dt = -\frac{1}{p}\int_0^{\pi}\sin t de^{-pt} = \underbrace{-\frac{1}{p}e^{-pt}\sin t\Big|_0^{\pi}}_{=0} +$$

$$+\frac{1}{p}\int_0^{\pi} e^{-pt}\cos t dt = -\frac{1}{p^2}\int_0^{\pi}\cos t de^{-pt} = -\frac{1}{p^2}e^{-pt}\cos t\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{p^2}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin t dt = \frac{1+e^{-p\pi}}{p^2} - \frac{1}{p^2}J(p) \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)J(p) = \frac{1+e^{-p\pi}}{p^2} \Rightarrow J(p) = \frac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2} \Rightarrow$$

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-p\pi}}\cdot\frac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2} = \boxed{\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}\cdot\frac{1}{1+p^2}}$$

תרגיל 3:

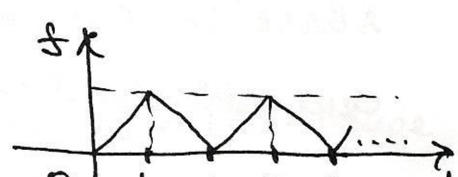
מצא את התמונה של ההמשכה המחזורית ב $[2,\infty)$ של הפונקציה:

$$f(t) = \begin{cases} t & ,0 \le t \le 1 \\ 2-t & ,1 \le t \le 2 \end{cases}$$

פתרון:

גרף הפונקציה וההמשכה של:

המשך



$\Leftarrow T=2 \Leftarrow$ לפי הנוסחא הכללית נקבל:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\cdot\int_0^T e^{-pt}f(t)dt=\left[\begin{array}{l} T=2 \\ f(t)=\begin{cases} t & ,0\le t\le 1 \\ 2-t & ,1\le t\le 2 \end{cases}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2p}}\left[\int_0^1 te^{-pt}+\int_1^2 (2-t)e^{-pt}dt\right]$$

נחשב את האינטגרלים בנפרד:

$$J_1=\int_0^1 te^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\int_0^1 tde^{-pt}=-\frac{1}{p}te^{-pt}\Big|_0^1+\frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1=\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{J_1=-\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}}$$

$$J_2=\int_1^2 (2-t)e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}\int_1^2 (2-t)de^{-pt}=-\frac{1}{p}(2-t)e^{-pt}\Big|_1^2-$$

$$-\frac{1}{p}\int_1^2 e^{-pt}dt=\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^2=\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p^2}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}\Rightarrow$$

$$\boxed{J_2=\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p^2}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}}\Rightarrow$$

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\left(J_1+J_2\right)=\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}e^{-2p}\right)==$$

$$=\frac{1}{p^2}\frac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{\left(1-e^{-p}\right)\left(1+e^{-p}\right)}=\boxed{\frac{1}{p^2}\frac{\left(1-e^{-p}\right)}{\left(1+e^{-p}\right)}}$$

2.משפט על דיפרנציאביליות (פונקצית המקור

משפט 2.1:

1. אם $f(t)$ גזירה ברציפות ב $(0,\infty)$ וגם $f'(t)$ הינה מקור, אזי גם $f(t)$ מקור, קיים $f(+0)=\lim\limits_{0<t\to 0} f(t)$ ומתקיים:

$$f'(t)\to pF(p)-f(+0)=p\left[F(p)-\frac{f(+0)}{p}\right],\ \ f(t)\to F(p)\quad (2.1)$$

כאן $\mathrm{Re}(p)>\sigma_0$ כאשר σ_0 הינו מעריך הגידול של $f'(t)$

2. אם $f(t)$ גזירה ברציפות n פעמים ב $(0,\infty)$ וגם $f^{(n)}(t)$ הינה מקור, אזי גם הפונקציות $f(t), f'(t),..., f^{(n-1)}(t)$ הינן מקור , קיימים $f(+0), f'(+0),..., f^{(n-1)}(+0)$ ומתקיימת ההתאמה:

$$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-f(+0)p^{n-1}-f'(+0)p^{n-2}-...-f^{(n-2)}(+0)p-f^{(n-1)}(+0)$$

$$=p^n\left[F(p)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}\right]\quad (2.2)$$

כאן $f(t)\to F(p)$, $\mathrm{Re}(p)>\sigma_0$ כאשר σ_0 הינו מעריך הגידול של $f^{(n)}(t)$.

בפרט, אם $f^{(k)}(+0)=0, k=0...n-1 \Leftarrow$

$$f^{(n)}(t) \to p^n F(p) \quad (2.3)$$

הוכחה:

1. (של המרצה)

(a) נראה, שקיים $f(t)$ $f(+0) = \lim\limits_{f \to 0+0}$, כיוון ש $f'(t)$ פונקציה רציפה

עבור $t \in (0,\infty)$, אז עבור כל $x \in (0,1]$ קיים האינטגרל $\int\limits_x^1 f(t)dt$ ומתקיים

השוויון:

$$f(1) - f(x) = \int\limits_x^1 f'(t)dt,\ 0 < x \le 1 \quad (2.3)$$

תהי נתונה סדרת פונקציות כלשהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $x_n > 0$ עבור $\forall n \ge 1$ וגם

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. $\Leftarrow$ מ(2.3) $\Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} f(1) - f(x_m) = \int\limits_{x_m}^1 f'(t)dt \\ f(1) - f(x_n) = \int\limits_{x_n}^1 f'(t)dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x_m) - f(x_n) = \int\limits_{x_n}^1 f'(t)dt - \int\limits_{x_m}^1 f'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{x_n}^1 f'(t)dt + \int\limits_1^{x_m} f'(t)dt = \int\limits_{x_n}^{x_m} f'(t)dt \Rightarrow$$

$$f(x_m) - f(x_n) = \int\limits_{x_n}^{x_m} f'(t)dt,\quad m \ge n \ge 1$$

יהי $\varepsilon > 0$, נראה ש $\exists N(\varepsilon)$ כך ש

$$\left| f(x_m) - f(x_n) \right| \le \varepsilon \quad \forall n,m \ge N\left(\varepsilon\right) \quad (2.4)$$

אם (2.4) נכון, אז לפי קריטריון קושי קיים $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$ מש"ל.

מתקיים:

$$\left| f(x_m) - f(x_n) \right| \le \int_{x_n}^{x_m} \left| f'(t) \right| dt$$

נשאיר את הביטוי כמו שהוא כיוון שלא ידוע אם $x_n \ge x_m$ או $x_n \le x_m$

כיוון ש $\left| f'(t) \right|$ מקור $\Leftarrow$ $\left| f'(t) \right| \le Me^{st}, t \ge 0$

$$\int_{x_n}^{x_m} \left| f'(t) \right| dt \le M \left| \int_{x_n}^{x_m} e^{st} dt \right| \le \frac{M}{S} \left| e^{x_m s} - e^{x_n s} \right| = \frac{M}{S} e^{x_n s} \left| e^{(x_m - x_n)s} - 1 \right| \le$$

$$\le \left[x_n \in (0,1] \right] \le \frac{M}{S} C(s) \left| x_m - x_n \right| \cdot s = MC(s) \left| x_m - x_n \right|,\ C(s) = const.$$

כיוון ש $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, אז $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon)$ כך ש $\left| x_m - x_n \right| \le \dfrac{\varepsilon}{MC(s)}$ עבור

$\Leftarrow n,m \ge N_0(\varepsilon)$

$$\left| f(x_m) - f(x_n) \right| \le MC(s) \left| x_m - x_n \right| \le MC(s) \frac{\varepsilon}{MC(s)} = \varepsilon$$

עבור $n,m \ge N_0(\varepsilon)$ $\Leftarrow$ $\boxed{\exists f(+0)}$

(b) בהרצאה 8 הראנו, שאם $\varphi(t)$ מקור אז $\psi(t)=\int_0^t \varphi(\xi)d\xi$ גם מקור, עם אותו מעריך הגידול;

בהרצאה 1 הראנו שאם $\varphi(t)$ מקור $\Leftarrow \int_0^t \varphi(\xi)d\xi$ מקור. אצלנו $f'(t)$ מקור

$\Leftarrow$ כיוון ש$f(+0)$ + $f(t)=\int_0^t f'(\xi)d\xi$ אז האינטגרל הוא מקור, $f(+0)$ קיים (ראה (a)) וגם $f(+0)=const$ - מקור $\Leftarrow$ $f(t)$ מקור כסכום של מקורות.

(c) כעת נבדוק את הנוסחא (2.1) עצמה. יהי $a>0$, אזי:

$$\int_0^a \underbrace{f'(t)}_{original} e^{-pt}dt = f(a)e^{-pa} - f(+0) + p\int_0^a \underbrace{f(t)}_{original} e^{-pt}dt \quad (2.5)$$

ב(2.5) המקורות בעלי אותו מעריך גידול σ_0. יהי $\operatorname{Re}(p)>\sigma_0$, אז לפי המשפט העיקרי על דיפרנציאביליות התמונה (הרצאה 8), האינטגרלים

$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt, \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \operatorname{Re}(p)>\sigma_0$ מתכנסים **בהחלט** (ובמידה שווה). אז ב(2.5) מצד ימין ושמאל כאשר $a\to\infty$ האינטגרלים הינם מתכנסים

$\Leftarrow \exists\lim_{a\to\infty} f(a)e^{-pa}=L$. קל לראות, ש$L=0$. אכן אם $L\neq 0$ $\Leftarrow$ $\exists t_0(\varepsilon)$ כך ש:

$$\left|f(t)e^{-pt}-L\right|<\varepsilon \text{ עבור } t\ge t_0(\varepsilon)$$

כאשר את $\varepsilon(>0)$ אנו בוחרים $\Leftarrow$

$$\infty > \int_{t_0(\varepsilon)}^{\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right|dt=\int_{t_0(\varepsilon)}^{\infty}\left|f(t)e^{-pt}-L+L\right|dt\ge$$

$$\ge \int_{t_0(\varepsilon)}^{\infty}\left\|L\right|-\left|f(t)e^{-pt}-L\right\|dt\ge\left[\varepsilon:=\frac{|L|}{2}\right]\ge\frac{|L|}{2}\int_{t_0(\varepsilon)}^{\infty}dt=\infty$$

סתירה. $\Leftarrow$ $L=0$ $\Leftarrow$ נשאיף את $a\to 0$ ב(2.5):

$$\int_0^{\infty}f'(t)e^{-pt}dt=-f(+0)+p\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt\Rightarrow$$

מש"ל.

$$\boxed{f'(t)\to pF(p)-f(+0)}$$

2. אם $f(t)$ גזירה ברציפות n פעמים ב$(0,\infty)$ וגם $f^{(n)}(t)$ הינה מקור, אז לפי 1 הפונקציה $f^{(n-1)}(t)$ גם מקור (עם אותו מעריך הגידול), $\exists f^{(n-1)}(+0)$. כיוון ש$f^{(n-2)}(t)$ גזירה ברציפות ב$(0,\infty)$ ו$f^{(n-1)}(t)$ מקור (כבר הוכח), אז לפי 1 הפונקציה $f^{(n-2)}(t)$ גם מקור (עם אותו מעריך הגידול), $\exists f^{(n-2)}(+0)$ וכך הלאה עד $f^{(0)}(t)$. נשאר להוכיח את (2.2):

$$f^{(n)}(t)\to p^n\left[F(p)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}\right]\quad(2.2)$$

נשתמש בשיטת האינדוקציה המתמטית.

1) $n=1$, לפי 1 $\Leftarrow$

$$f'(t)\to pF(p)-f(+0)=p\left[F(p)-\sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}\right]$$

2) תהי (2.2) נכונה עבור כל $m=0,\ldots,n$ $\Leftarrow$

$$f^{(n+1)}(t)=\left(f^{(n)}(t)\right)'\to p\left[G(p)-\frac{f^{(k)}(+0)}{p}\right]\quad(2.5)$$

כאן $G(p)$ - תמונת $f^{(n)}(t)$, אך הנוסחא עצמה כתובה לפי 1. לפי הנחת האינדוקציה:

$$f^{(n)}(t)\to G(p)=p^{n}\left[F(p)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}\right]$$ $\Leftarrow$ נציב ב(2.5) ונקבל

$$f^{(n+1)}(t)\to p\left\{p^{n}\left[F(p)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}\right]-\frac{f^{(k)}(+0)}{p}\right\}=$$

$$=p^{n+1}\left[F(p)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}-\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}\right]=$$

$$=p^{n+1}\left[F(p)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(+0)}{p^{k+1}}\right]$$

מש"ל.

הערה:

צריך לשים לב, שנגזרת של מקור אינה תמיד מקור. לדוגמא $f(t)=\sin\left(e^{x^2}\right)$ מקור ($f(t)$ רציפה וחסומה) אבל $f'(t)=2x\cdot e^{x^2}\sin\left(e^{x^2}\right)$ אינה מקור, כיוון שמעריך הגידול של $f'(t)$ שווה לאינסוף (תבדקו את זה)

תרגיל 1:

מצא את תמונת הביטוי, אם $x(t)\to F(p)$:

$$x^{(4)}-2x'''(t)+4x''(t)+3x'(t)+6x(t)-12=\varphi(t)$$

עם תנאי ההתחלה: $x(0)=5, x'(0)=0, x''(0)=-1, x'''(0)=1$

מניחים ש $x^{(4)}(t)$ מקור רציף.

פתרון:

נשתמש במשפט שהוכחנו ובהתמרה הידועה: $1 \to \dfrac{1}{p}$

$$x(t) := F(p)$$

$$x'(t) \to p\left[F(p) - \frac{x(0)}{p}\right] = p\left[F(p) - \frac{5}{p}\right] = \boxed{pF(p) - 5}$$

$$x''(t) \to p^2\left[F(p) - \frac{x(0)}{p} - \frac{x'(0)}{p^2}\right] = p^2\left[F(p) - \frac{5}{p} - \frac{0}{p^2}\right] =$$

$$= \boxed{p^2F(p) - 5p}$$

$$x'''(t) \to p^3\left[F(p) - \frac{x(0)}{p} - \frac{x'(0)}{p^2} - \frac{x''(0)}{p^3}\right] =$$

$$= p^3\left[F(p) - \frac{5}{p} - \frac{0}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right] = \boxed{p^3F(p) - 5p^2 + 1}$$

$$x^{(4)}(t) \to p^4\left[F(p) - \frac{x(0)}{p} - \frac{x'(0)}{p^2} - \frac{x''(0)}{p^3} - \frac{x'''(0)}{p^4}\right] =$$

$$= p^4\left[F(p) - \frac{5}{p} - \frac{0}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right] = \boxed{p^4F(p) - 5p^3 + p - 1}$$

אם כך (לפי הגדרת הביטוי):

$1 \to \frac{1}{p}$	-12
$x(t) \to F(p)$	6
$x'(t) \to pF(p)-5$	3
$x''(t) \to pF(p)-5p^2$	4
$x'''(t) \to p^3F(p)-5p^2+1$	-2
$x^{(4)}(t) \to p^4F(p)-5p^3+p-1$	1

$\Leftarrow$

$$\varphi(t) \to \left(p^4-2p^3+4p^2+3p+6\right)F(p)-15-20p+10p^2-$$

$$-2-5p^3+p-1-\frac{12}{p}$$

$$=\boxed{\left(p^4-2p^3+4p^2+3p+6\right)F(p)-5p^3+10p^2-19p-18-\frac{12}{p}}$$

תרגיל 2:

מצא את התמונה של $f(t)=\sin^2 t$

פתרון:

$$f(t)=\sin^2 t \to F(p) \Rightarrow f'(t) \to pF(p)-f(0)=$$

$$\left[f(0)=\sin^2 0=0\right]=pF(p)$$

$$f'(t)=2\sin t\cos t=\sin 2t\rightarrow$$

מצד שני $\left[\sin t\rightarrow\frac{1}{p^2+1}\right]\rightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{2}{p^2+4}$

זאת אומרת, $pF(p)=\frac{2}{p^2+4}\Rightarrow\boxed{F(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}}$

תרגיל 3:

מצא את התמונה של $f(t)=t\sin\omega t$

פתרון 1:

תהי $F(p)\leftarrow f(t)=: t\sin wt\Leftarrow$

$$f'(t)=\sin\omega t+\omega t\cdot\cos\omega t\rightarrow pF(p)-f(0)=pF(p)$$

$$f''(t)=2\omega\cos\omega t-t\omega^2\sin\omega t\rightarrow p^2F(p)-\underbrace{f'(0)}_{=0}=p^2F(p)$$

$$\Rightarrow f''(t)+\omega^2f(t)=2\omega\cos\omega t\rightarrow\left(p^2+\omega^2\right)F(p)$$

אבל

$$2\omega\cos\omega t \to \left|\begin{array}{l} \cos t \to \dfrac{p}{p^2+1} \\ \cos\omega t \to \dfrac{1}{\omega}\dfrac{p/\omega}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1} = \dfrac{p}{p^2+\omega^2} \end{array}\right| \to \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(p^2+\omega^2\right)F(p) \to \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \Rightarrow \boxed{F(p) = \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}}$$

בהקשר של תרגיל 3, נביא עוד טענה טובה.

משפט 2.2:

אם α פרמטר ו $f(t,\alpha) \to F(p,\alpha)$ והפונקציות

$$\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha} \quad , \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)dt \quad (2.6)$$

כפונקציות של המשתנה t הינן מקורות, אזי:

$$\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha} \to \frac{\partial F(p,\alpha)}{\partial\alpha} \quad , \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)dt \to \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p,\alpha)d\alpha$$

פתרון 2 (של תרגיל 3):

$$\cos\omega t \to \frac{p}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial w}\left(\cos\omega t\right) = -t\sin\omega t \to \frac{\partial}{\partial w}\frac{p}{p^2+\omega^2} =$$
$$= -\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} \Rightarrow \boxed{t\sin\omega t \to \frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}}$$

תרגיל 4:

מצא את התמונה של $f(t)=te^t$

פתרון:

תהי

$$f(t)\to F(p) \Rightarrow f'(t)=e^t+te^t \to pF(p)-f(0)=pF(p) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[e^t \to \frac{1}{p-1}\right] \Rightarrow f'(t)=e^t+te^t \to \frac{1}{p-1}=(p-1)F(p) \Rightarrow$$
$$F(p)=\frac{1}{\left(p-1\right)^2}$$

תרגיל 5 (של המרצה):

מצא את התמונות של הפונקציות $t^n, \quad n=1,2,\ldots$

פתרון:

תהי $t^n \to F(p)$. אז L לפי משפט דיפרנציאביליות:

$nt^{n-1} \to pF(p)-t^n\Big|_{t=0} = pF(p)$ $\Leftarrow$ באופן דומה:

$\boxed{n! \to p^n F(p)} \Leftarrow \dots \Leftarrow n(n-1)t^{n-2} \to p^2 F(p)$. מצד שני,

$n! = n!1 \to \dfrac{n!}{p}$ לכן אנו מקבלים:

$$p^n F(p) = \frac{n!}{p} \Rightarrow F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots}$$

3.משפט על דיפרנציאביליות התמונה

משפט 3.1:

תהי $f(t)$ מקור עם מעריך גידול s_0 ו $f(t) \to F(p)$. אזי:

1. הפונקציה $tf(t)$ - גם המקור עם מעריך הגידול s_0 ומתקיים השוויון:

$$(-1) \cdot t \cdot f(t) \Rightarrow F'(p), \quad \mathrm{Re}(p) \geq s_0 + \delta, \quad \delta > 0 \quad (3.1)$$

2. הפונקציה $t^n f(t), n \geq 2$ - גם המקור עם מעריך הגידול s_0 ומתקיים השוויון:

$$(-1) \cdot t^2 \cdot f(t) \Rightarrow F^{(n)}(p), \quad \mathrm{Re}(p) \geq s_0 + \delta, \quad \delta > 0, \; n \geq 2 \quad (3.2)$$

הוכחה:

נבדוק רק את 1, כיוון ש2 נובע ע"י הפעלת 1 n פעמים. אם כך;

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad \mathrm{Re}(p) \geq s_0 + \delta, \quad \delta > 0 \quad (3.3)$$

המשימה שלנו היא לחשב את $F'(p)$, כדי להשתמש בכלל לייבניץ:

$$F'(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty \frac{d}{dp}\left(f(t)e^{-pt}\right)dt=\int_0^\infty f(t)\frac{d}{dp}e^{-pt}dt=$$

$$=-\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt=\left|tf(t)-original\right|=\int_0^\infty\left[(-1)tf(t)\right]e^{-pt}dt$$

זו התמרת לפלס $\Leftarrow$ $\boxed{(-1)tf(t)\to F'(p)}$.

המשימה שלנו – להצדיק את השימוש בכלל לייבניץ:

אם $\Phi(y)=\int_0^\infty f(t,y)dt \Rightarrow \Phi'(y)=\int_0^\infty f_y^{'}(t,y)dt$

נבדוק את תנאי משפט לייבניץ (1-4):

1. לכל $y\in[d,\infty)$ קיים אינטגרל רימן $\int_0^\infty\left|f(t,y)\right|dt$

אצלנו: $\int_0^\infty\left|f(t)e^{-pt}\right|dt\le\left[\left|f(t)\right|\le M\left(\delta/2\right)e^{\left(s_0+\delta/2\right)t}s_0\right]$

כיוון ש$f(t)$ מקור עם מעריך גדול s_0 $\Leftarrow$

$$\le\left|f(t)\right|\left|e^{-pt}\right|\le M\left(\delta/2\right)e^{\left(s_0+\delta/2\right)t}e^{-(\operatorname{Re}p)t}\le\left[\operatorname{Re}p\ge s_0+\delta\right]\le$$

$$\le M\left(\delta/2\right)e^{\left(s_0+\delta/2\right)t}e^{-\left(s_0+\delta/2\right)t}=M\left(\delta/2\right)e^{-\left(\delta/2\right)t}\Rightarrow$$

$$\left|f(t)e^{-pt}\right|\le M_1\left(\delta\right)e^{-\left(\delta/2\right)t},t\ge 0\Big|\le$$

$$\le\int_0^\infty M_1\left(\delta\right)e^{-\left(\delta/2\right)t}dt<\infty$$

כדרוש.

2. $\forall t\in[0,\infty),\forall y\in[d,\infty) \quad \exists f_y^{'}(+,y)$.

אצלנו: $\frac{d}{dp}\left(f(t)e^{-pt}\right)=f(t)\frac{d}{dp}\left(e^{-pt}\right)=-tf(t)e^{-pt}$ כדרוש.

3. עבור כל $y\in[d,\infty)$ קיים אינטגרל של רימן:

$$\int_0^{\infty}\left|f_y{}'(t,y)\right|dt$$

אצלנו $f(t,p)=f(t)e^{-pt} \Leftarrow f_p{}'(t,p)=-tf(t)e^{-pt} \Leftarrow$

$$\Leftarrow \left|f_p{}'(t,p)\right|=\left|tf(t)\right|\left|e^{-pt}\right|\le|t|\cdot M_1(\delta)e^{\left(-\frac{\delta}{2}\right)t}$$

$$\int_0^{\infty}\left|f_p{}'(t,p)\right|dt\le M_1(\delta)\int_0^{\infty}te^{-(\frac{\delta}{2})t}dt<\infty$$

4. קיימת פונקציה $g(t)$ אינטגרבילית לפי רימן,כך ש-

$$\left|f_y{}'(t,y)\right|\le g(t) \quad \forall t\in[0,\infty),y\in[d,\infty) \ and \ \int_0^{\infty}g(t)dt<\infty$$

אצלנו (ראה לעיל):

$$\left|f_p{}'(t,y)\right|\le M_1(\delta)+e^{-\left(\frac{\delta}{2}\right)t}:=g(t)\in L_1(0,\infty)$$

אם כך,כל התנאים של משפט לייבניץ מתקיימים ולכן (1) הינו נכון.

מסקנה 3.1.1:

אם $f(t)$ ו-$f'(t)$ הינם מקורות, אזי $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} pF(p) = f(0)$.

ובאמת, $0 \to \left(pF(p)-f(0)\right) \to f'(t)$ עבור $\operatorname{Re} p \to \infty$.

תרגיל 1:

הוכח כי

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}$$

הוכחה:

כיוון ש- $\frac{1}{p} \to 1$, לפי משפט 3.1 (ראה (2)) נקבל:

$$\frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} \to (-1)^n t^n = (-1)^n t^n \cdot 1$$ $\Leftarrow$ אחרי צמצום ב-$(-1)^n$ נקבל:

$$\boxed{t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

תרגיל 2:

מצא את התמונה עבור $f(t) = t\cos\omega t$

פתרון:

כיוון ש- $\cos\omega t \to \frac{p}{p^2+\omega^2}$ $\Leftarrow$ לפי (1) ממשפט 3.1 נקבל:

$$\Leftarrow \quad -t\cos\omega t \to \left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)'_p = \frac{1\cdot\left(p^2+\omega^2\right)-p(2p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} = \frac{\omega^2-p^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$$

$$\boxed{t\cos\omega t \to \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}}$$

תרגיל 3:

מצא את התמונה עבור $f(t)=t^n e^{at}$

פתרון:

כיוון ש- $\frac{1}{p}$ $\to 1$ $\Leftarrow$ לפי משפט ההזזה: $e^{at}\cdot 1 \to \frac{1}{p-a}$ $\Leftarrow$ לפי משפט 3.1 ((2))

נקבל:

$(-1)^n$ נצמצם ב- $\Leftarrow$ $(-1)^n t^n e^{at} \to \left(\frac{1}{p-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(p-a)^{n+1}}$

$$\boxed{t^n e^{at} \to \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}}$$

תרגיל 4:

מצא את התמונה עבור $f(t)=te^{2t}\sin 3t$

פתרון:

ידוע: $\sin t \to \frac{1}{p^2+2}$ $\Leftarrow$משפט הדמיון

$$\Leftarrow \boxed{\sin 3t \to \frac{3}{p^2+9}} \text{ ז"א } \Leftarrow \sin 3t \to \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{p^2+9}$$

משפט ההזזה $e^{2t}\sin 3t \to \dfrac{3}{(p-2)^2+9} \Leftarrow$ משפט 3.1 ((1)):

$$\Leftarrow te^{2t}\sin 3t \to -\left(\frac{3}{(p-2)^2+9}\right)' = \frac{3\cdot 2(p-2)}{\left((p-2)^2+9\right)^2}$$

$$\boxed{te^{2t}\sin 3t \to \frac{6(p-2)}{\left((p-2)^2+9\right)^2}}$$

תרגיל 5:

מצא מקור רציף $f(t)$, כך ש-

$$f(t) \to \frac{1}{\left((p+2)^2+4\right)^2}$$

פתרון:

אם נמצא מקור רציף $\varphi(t)$, כך ש-

$$\varphi(t) \to \frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$$

אזי לפי משפט הדמיון נקבל:

$$\varphi(2t)\to\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{p^2}{4}+1\right)^2}=\frac{8}{(p^2+4)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\varphi(2t)}{8}\to\frac{1}{(p^2+4)^2}$$

ולפי משפט ההזזה נקבל:

$$\frac{e^{-2t}\varphi(2t)}{8}\to\frac{1}{\left((p+2)^2+4\right)^2}$$

כעת נמצא $\varphi(t)\to\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$. ידוע:

$$\begin{cases}\sin t\to\dfrac{1}{p^2+1}\\ \cos t\to\dfrac{p}{p^2+1}\end{cases}$$ $\Rightarrow$ לפי משפט דיפרנציאליות התמונה נקבל:

$$t\cdot\cos t\to-\left(\frac{p}{p^2+1}\right)'=-\frac{p^2+1-p\cdot 2p}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\alpha\sin t+\beta t\cos t\to\frac{\alpha}{p^2+1}+\beta\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{\alpha\left(p^2+1\right)+\beta\left(p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)p^2+(\alpha-\beta)}{\left(p^2+1\right)^2}\equiv\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=1\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2},\beta=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$ לפי משפט היחידות:

$$\frac{1}{2}\left[\sin t - t\cos t\right] = \varphi(t) \ \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{e^{-2t}}{16}\left[\sin 2t - 2t\cos 2t\right] \to \frac{1}{\left[(p+2)^2+4\right]^2}$$

תרגיל 6:

מצא את התמונה עבור $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

פתרון (של המרצה):

יהי $\dfrac{\sin t}{t} \to F(p)$ $\Leftarrow$ משפט על הדיפרנציאליות של התמונה

$\sin t \to \dfrac{1}{p^2+1} \Rightarrow F'(p) = -\dfrac{1}{p^2+1}$ אבל $t\cdot\dfrac{\sin t}{t} = \sin t \to -F'(p)$.

כיוון ש-$\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p) = 0$ לכן

$$\underbrace{F(\infty)}_{=0} - F(p) = -F(p) = -\int_p^{\infty}\frac{ds}{s^2+1} = -\frac{\pi}{2} + \text{arctg}p$$

$$\boxed{F(p) = \frac{\pi}{2}\text{-arctg}p} \ \Leftarrow$$

4.משפט האינטגרציה של מקור

משפט 4.1:

יהי $f(t)$ מקור עם מעריך הגידול s_0 ו-

$f(t) \to F(p)$ עבור $\operatorname{Re} p > s_0$

אזי הפונקציה $\varphi(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi$ גם כן מקור עם מעריך הגידול s_0 ומתקיים היחס:

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi \to \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > s_0 \quad (4.1)$$

הוכחה:

הטענה כי $\varphi(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi$ מקור עם מעריך הגידול s_0,אם $f(t)$ מקור עם מעריך הגידול s_0, כבר טופלה. נשאר לבדוק (4.1).

יהי $\varphi(t) \to \phi(p)$ עבור $\operatorname{Re} p > s_0$ (כיוון ש-$\varphi(t)$ בעלת מעריך הגידול s_0)$\Leftarrow$ לפי משפט דיפרנציאליות המקור$\Leftarrow$

אבל, $\varphi'(t) \to p\phi(p) - \varphi(0) = |\varphi(0) = 0| = p\phi(p)$

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{p} \Leftarrow p\phi(p) = F(p) \Leftarrow \varphi'(t) \equiv f(t) \to F(p)$$

$$\boxed{\int_0^t f(\xi)d\xi \to \frac{F(p)}{p} \ , \ \operatorname{Re} p > s_0} \quad \Leftarrow$$

תרגיל 1:

מצא את התמונה של הפונקציה $\int_0^t \sin 2s ds$

פתרון:

$$\Leftarrow \ \sin 2t \to \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{2}{p^2+4} \Leftarrow \text{משפט הדמיון} \Leftarrow \ \sin t \to \frac{1}{p^2+1}$$

לפי משפט האינטגרציה של המקור:

$$\int_0^t \sin 2s ds \to \frac{2}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p}=\frac{p}{p(p^2+4)}$$

בדיקה:

$$\int_0^t \sin 2s ds = -\left.\frac{\cos 2s}{2}\right|_0^t=\frac{1-\cos 2t}{2} \ \Rightarrow$$

$$\int_0^t \sin 2s ds \to \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{p/2}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2+4}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{p^2+4-p^2}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}$$

תרגיל 2:

מצא את התמונה עבור $\varphi(t)$, כאשר:

$$\varphi(t)=\int_0^t s^2 e^{-s} ds$$

פתרון:

$$\frac{2!}{p^3} \leftarrow t^2 \Leftarrow$$ משפט ההזזה $$\Leftarrow \frac{2!}{(p+1)^3} \leftarrow t^2e^{-t} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow$$ משפט האינטגרציה של המקור $$\Leftarrow \boxed{\int_0^t s^2e^{-s}ds \to \frac{2!}{p(p+1)^3}}$$

תרגיל 3:

מצא את התמונה עבור $\varphi(t)=\int_0^t (s+1)\cos\omega s ds$

פתרון:

כיוון ש- $\cos t \to \frac{p}{p^2+1}$ $\Leftarrow$ משפט הדמיון $\Leftarrow$

$$\cos\omega t \to \frac{1}{\omega}\frac{p/\omega}{\frac{p^2}{\omega^2}+1}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$ $\Leftarrow$ משפט על דיפרנציאביליות התמונה $\Leftarrow$

$$\Leftarrow \; t\cos\omega t \to -\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)'_p=-\frac{p^2+\omega^2-2p^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}=\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$$

$$t\cos\omega t+\cos\omega t=(t+1)\cos\omega t \to \frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}+\frac{p}{p^2+\omega^2}=$$

$$=\frac{p^2-\omega^2+p^3+p\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$$

$\Leftarrow$ משפט אינטגרביליות התמונה $\Leftarrow$

$$\int_0^t (s+1)\cos\omega s ds \to \frac{1}{p}\frac{p^3+p\omega^2+p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2} = \boxed{\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p\left(p^2+\omega^2\right)^2}}$$

תרגיל *4* (של המרצה):

מצא את התמונה עבור $\varphi(t)=\int_0^t \frac{\sin s}{s}ds$

פתרון:

יהי $\frac{\sin t}{t}\to\phi(p)$ $\Leftarrow$ משפט דיפרנציאביליות התמונה $\Leftarrow$

$t\cdot\frac{\sin t}{t}\to-\phi'(p)$ $\Leftarrow$ $\sin t\to-\phi'(p)$ אבל

$\boxed{\phi'(p)\to-\frac{1}{p^2+1}}$ $\sin t\to\frac{1}{p^2+1}$ $\Leftarrow$.

בהמשך, כיוון ש-$\lim\limits_{\operatorname{Re}p\to+\infty}\phi(p)=0\Leftarrow$

$$\underbrace{\phi(\infty)}_{=0}-\phi(p)=-\int_p^\infty\frac{ds}{s^2+1}=-\frac{\pi}{2}+\arctan p \;\Rightarrow\; \phi(p)=\frac{\pi}{2}-\arctan p$$

כעת, לפי משפט אינטגרביליות המקור נקבל:

$$\int_0^t\frac{\sin s}{s}ds\to\frac{1}{p}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan p\right]=\boxed{\frac{\pi}{2p}-\frac{\arctan p}{p}}$$

תרגיל 5:

מצא את התמונה עבור $\varphi(t)$, כאשר

$$\varphi(t)=\int_0^t \frac{\cos\beta\xi-\cos\alpha\xi}{t}\,d\xi$$

פתרון:

$\sin t \to \dfrac{1}{p^2+1}$ $\Leftarrow$ משפט הדמיון $\Leftarrow$ $\sin st \to \dfrac{s}{p^2+s^2}$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ משפט אינטגרביליות לפי פרמטר $\Leftarrow$

$$\int_\alpha^\beta \sin st\,ds=-\frac{\cos st}{t}\bigg|_\alpha^\beta=\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{t}\to\int_\alpha^\beta\frac{s\,ds}{s^2+p^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(s^2+p^2)\Big|_\alpha^\beta=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+p^2}{\alpha^2+p^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cos\beta t-\cos\alpha t}{t}\to\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+p^2}{\beta^2+p^2}$$

לפי אינטגרביליות המקור:

$$\boxed{\int_0^t\frac{\cos\beta t-\cos\alpha t}{t}dt\to\frac{1}{2p}\ln\frac{\alpha^2+p^2}{\beta^2+p^2}}$$

5.משפט על אינטגרביליות התמונה

משפט 5.1:

אם $\frac{f(t)}{t}$ מקור עם מעריך הגידול s_0, אזי $f(t)$ גם כן מקור עם אותו מעריך הגידול.יהי

$$f(t) \to F(p)\ ,\ \operatorname{Re} p > s_o \quad (5.1)$$

אזי

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^\infty F(s)ds\ ,\ \operatorname{Re} p > s_0 \quad (5.2)$$

כאשר האינטגרציה ב-(5.2) מתבצעת לפי כל מסלול שעבורו מתקיים $\operatorname{Re} p \to \infty$.

הוכחה:

יהי $\phi(t)$ תמונת המקור $\frac{f(t)}{t}$. אזי

$-f(t) = (-t)\cdot\frac{f(t)}{t} \leftarrow$ משפט על דיפרנציאליות התמונה $\leftarrow \phi'(p)$. מצד שני

$$f(t) \to F(p) \Leftarrow \boxed{\phi'(p) = -F(p)} \Leftarrow$$

$$\phi(A) - \phi(p) = -\int_p^A F(s)ds$$

כיוון ש-$\phi(p)$ תמונה, אזי $\phi(A) \to 0$ עבור $\operatorname{Re} A \to \infty \Leftarrow$

$$-\phi(p) = -\int_p^\infty F(s)ds \Leftarrow \boxed{\phi(p) = \int_p^\infty F(s)ds}$$

מסקנה 5.2:

יהי $f(t)$ מקור ו-$f(t)\to F(p)$.

אם אינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt \quad (5.3)$$

מתכנס, אזי מתקיים השוויון:

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(p)dp \quad (5.4)$$

כאשר את האינטגרל הימני ניתן לחשב לפי חצי ציר החיובי.

תרגיל 1:

מצא את התמונה עבור $\varphi(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ וחשב את האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$$

פתרון:

פונקציה $\varphi(t)$ מקור, כיוון ש-$\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ $\Leftarrow$ $\varphi(t)$רציפה וחסומה. כיוון ש-

$\sin t\to\dfrac{1}{p^2+1}$ $\Leftarrow$ משפט על אינטגרביליות התמונה $\Leftarrow$

$$\frac{\sin t}{t}\to\int_p^\infty \frac{dt}{t^2+1}=\arctan t\Big|_1^\infty=\boxed{\frac{\pi}{2}-\arctan p}$$

עבור חישוב של $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ נשתמש במסקנה (5.2).

אם כך, $f(t)=\sin t$ מקור, $f(t)=\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$

בהמשך, אינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$$

מתכנס לפי עקרון דריכלה:

1. פונקציה $\alpha(t)=\sin t$ אינטגרבילית בכל קטע סופי $[a,A]$, $(A\geq a)$
והאינטגרל שלה חסום בהחלט:
$$\left|\int_a^A \alpha(t)dt\right| = \left|\cos A-\cos a\right| \leq 2<\infty \quad \forall A\geq a$$

2. פונקציה $\beta(t)=\frac{1}{t}\to 0$ מונוטונית עבור $t\to\infty$ $\Leftarrow$ $a:=0$
$$\int_0^\infty \alpha(t)\beta(t)dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$$

מתכנס לפחות בתנאי.

כעת לפי מסקנה 5.2 נקבל $\left(f(t)=\sin t \to \frac{1}{p^2+1}=F(p)\right)$.

$$\left(\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt\right) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \left(\int_0^\infty F(s)ds\right) = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

תרגיל 2:

מצא את התמונה עבור $\varphi(t)=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\ ,\ a>0\ ,\ b>0$

וחשב את האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$$

פתרון:

$$e^{-at}=e^{-at}\cdot 1=\left|1\to\frac{1}{p}\oplus e^{p_0 t}f(t)\to F(p-p_0)\right|=\frac{1}{p+a}$$

לכן , באופן דומה:

כעת $e^{-bt}\to\frac{1}{p+b}\Rightarrow e^{-at}-e^{-bt}\Rightarrow\frac{1}{p+a}-\frac{1}{p+b}=\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$

לפי משפט 5.1 (על אינטגרביליות התמונה):

$$e^{-at}-e^{-bt}\to\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}\Rightarrow\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\to\int_p^\infty\frac{b-a}{(t+a)(t+b)}dt$$

בה

$$=\int_p^\infty\left(\frac{1}{t+a}-\frac{1}{t+b}\right)dt=\int_p^\infty d\ln\frac{t+a}{t+b}=\ln\frac{t+a}{t+b}\bigg|_p^\infty=\boxed{\ln\frac{p+b}{p+a}}$$

משך, כיוון ש-$e^{-at}-e^{-bt}=f(t)\to\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}=F(p)$, אזי לפי

מסקנה 5.2 נקבל, שאם אינטגרל: $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$ מתכנס, אזי הינו שווה

$$\int_0^\infty F(p)dt = \ln\frac{p+b}{p+a}\Big|_{p=0} = \boxed{\ln\frac{b}{a}}$$

נבדוק התכנסות של $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt$. כיוון שעבור $t>0$ אינטגרל-פונקציה רציפה ו-$a>0, b>0$, אזי האינטגרל מתכנס,

אם $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ פונקציה חסומה ורציפה בסביבת אפס (מימין). נקבל:

$$\lim_{t\to+0}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = |L'opital| = \lim_{t\to+0}\frac{-ae^{-at}+be^{-bt}}{1} = b-a<\infty$$

וההמשך מובן מאליו.

תרגיל 3:

חשב את האינטגרל:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t}\sin at}{t}dt \ , \ \alpha>0 \ , \ a>0$$

פתרון:

נשתמש במסקנה 5.2. נקבל:

$$\sin at \to \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{p^2}{a^2}+1} = \frac{a}{p^2+a^2} \Leftarrow \text{משפט הדמיון} \Leftarrow \ \sin t \to \frac{1}{p^2+1}$$

$$e^{-\alpha t}\sin at \leftarrow \text{משפט ההזזה} \leftarrow \frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2} \quad \Leftarrow$$

אם האינטגרל $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin at}{t}dt$ קיים, אזי

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin at}{t}dt = \int_0^\infty \frac{a}{\left(p+\alpha\right)^2+a^2}dp$$

א. נקבע את קיום האינטגרל לפי עקרון דריכלה

1. אינטגרל $\int_0^A \frac{\sin t}{t}dt$ מתכנס $\Leftarrow \left|\int_0^A \frac{\sin t}{t}dt\right| \le c < \infty$

כיוון שעבור $A \to \infty$: $\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

2. $e^{-\alpha t} \to 0$ עבור $t \to \infty$ מונוטונית $\Leftarrow \int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt$ מתכנס

הערה:

$$\forall a>0 \quad \int_0^\infty \frac{\sin at}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin at}{at}dat = \int_0^\infty \frac{\sin s}{s}ds = \frac{\pi}{2}$$

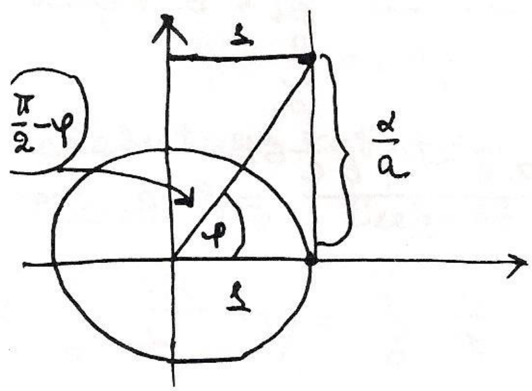
ב. חישוב

$$\int_0^\infty \frac{adp}{(p+\alpha)^2+a^2} = |p+\alpha=t| = a\int_\alpha^\infty \frac{dt}{t^2+a^2} = a\frac{1}{a^2}a\int_\alpha^\infty \frac{d\frac{t}{a}}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1}$$

$$= \arctan\frac{t}{a}\Big|_\alpha^\infty = \boxed{\frac{\pi}{\alpha}-\arctan\frac{\alpha}{a}} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{a}\right)} = \frac{a}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\pi}{\alpha}-\arctan\frac{\alpha}{a} = \arctan\frac{a}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin at}{t}dt = \arctan\frac{a}{\alpha}}$$



תרגיל 4:

חשב את האינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}dt \ , \ a>0 \ , \ b>0$$

פתרון:

נשתמש במסקנה 5.2:

$$\cos t \to \frac{p}{p^2+1} \Leftarrow$$ משפט הדמיון $\Leftarrow$

$$\Leftarrow \cos \omega t \to \frac{1}{\omega}\frac{p/\omega}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$f(t) = \cos at - \cos bt \to \frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2} =$$

$$= (b^2-a^2)\frac{p}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)} = F(p)$$

א. אינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}dt$ מתכנס לפי עקרון דריכלה $\Leftarrow$

ב. $\int_0^\infty \frac{f(t)dt}{t} = \int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}dt = \int_0^\infty \frac{(b^2-a^2)\,pdp}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+b^2\right)} =$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{p}{\left(p^2+a^2\right)} - \frac{p}{\left(p^2+b^2\right)}\right)dp = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2}{a^2} = \ln\frac{b}{a}$$

תרגיל 5:

יהי $\frac{f(t)}{t}$ מקור ו-$f(t)\to F(p)$. מצא את התמונה עבור

$$\varphi(t)=\int_0^t \frac{f(s)}{s}ds$$

בפרט, מצא את התמונה עבור $\int_0^t \frac{\mathrm{sh}\xi}{\xi}d\xi$.

פתרון:

כיוון ש-$\frac{f(t)}{t}$ מקור $\Leftarrow$ $\varphi(t)=\int_0^t \frac{f(s)}{s}ds$ מקור $\Leftarrow$

$\frac{f(t)}{t} \leftarrow$ אינטגרביליות התמונה $\leftarrow \int_p^\infty F(s)ds$

כעת לפי הכלל של אינטגרביליות המקור נקבל:

$$\int_0^t \frac{f(s)}{s}ds \to \frac{1}{p}\int_p^\infty F(s)ds$$

בהמשך,

$$\left.\begin{aligned} e^t &= e^t\cdot 1 \to \frac{1}{p-1} \\ e^{-t} &= e^{-t}\cdot 1 \to \frac{1}{p+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \mathrm{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)\Rightarrow$$

לפי הנוסחא שהוכחנו נקבל:

$$\int_0^t \frac{\mathrm{sh}\xi}{\xi} d\xi \to \frac{1}{2p}\int_p^\infty \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) ds = \frac{1}{2p}\int_p^\infty d\left(\ln\frac{s-1}{s+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2p} \ln\frac{s-1}{s+1}\bigg|_p^\infty = \boxed{\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}}$$