תרגילי דוגמא וחזרה מההרצאה האחרונה (שירה)

תרגיל

מצא נקודות מקסימום אבסולוטית של הפונקציה $f(x,y)=y(x^2-1)$

בתחום $D=\left\{(x,y)\mid \begin{array}{c} x^2+4y^2\leq 16 \\ y\leq x \end{array}\right\}$.

נתחיל מלחפש נק' קיצון לוקליות בתוך התחום:

$$\begin{array}{c} f_x=y(2x)=0 \\ f_y=x^2-1=0 \end{array} \implies \begin{array}{c} y=0 \vee x=0 \\ x=\pm 1 \end{array} \implies (\pm 1,0)$$

מתוך הנקודות שקיבלנו רק $(1,0)$היא בתוך התחום.

עכשיו צריך לטפל בקצוות, בשפה של D. השפה של D מורכבת בחלקה מהישר $y=x$ ובחלקה מהאליפסה $x^2+4y^2=16$.

נחפש את נק' הקצה תחת האילוץ של הישר ותחת האילוץ של האליפסה ב־נ־פ־ר־ד!

נתחיל מהישר $g=y-x$:

$$\begin{array}{c} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g=0 \end{array} \implies \begin{array}{c} 2yx=\lambda(-1) \\ x^2-1=\lambda\cdot 1 \\ y=x \end{array} \implies \begin{array}{c} 2x^2=-\lambda \\ x^2=\lambda+1 \end{array} \implies \lambda=\frac{-2}{3} \implies y=x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \implies (\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})$$

שימו לב ששתי הנקודות נמצאות בתחום! (צריך לבדוק את זה כי אנחנו מתעסקים בשני אילוצים בנפרד, אולי יש נק' קיצון על הישר אבל היא רחוקה מאוד מאליפסה? ולכן בכלל לא בשפה של D?).

.

כעת עבור האליפסה $g=x^2+4y^2-16$:

$$\begin{array}{c} 2xy=\lambda 2x \\ x^2-1=\lambda 8y \\ x^2+4y^2=16 \end{array}$$

לפי המשוואה הראשונה $x=0 \vee y=\lambda$.

אם $x=0$ אז לפי המשוואה השלישית $y=\pm 2$ ולפי המשוואה השנייה $\lambda=\mp\frac{1}{16}$. ונקבל את הנקודות $(0,\pm 2)$. מתוכן רק הנקודה $(0,-2)$ נמצאת בתחום.

אם $y=\lambda$ אז שאר המשוואות הן

$$\begin{array}{c} x^2-1=8y^2 \\ x^2+4y^2=16 \end{array} \Longrightarrow 8y^2+1=16-4y^2 \Longrightarrow 12y^2=17 \Longrightarrow y=\pm\sqrt{\frac{17}{12}} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{17}{12}},\mp\sqrt{\frac{17}{12}}$$

ונקבל את הנקודות $(\pm\sqrt{\frac{17}{12}},\mp\sqrt{\frac{17}{12}}),(\pm\sqrt{\frac{17}{12}},\pm\sqrt{\frac{17}{12}})$,
מתוכן רק $(\sqrt{\frac{17}{12}},-\sqrt{\frac{17}{12}}),(\pm\sqrt{\frac{17}{12}},\pm\sqrt{\frac{17}{12}})$ הן בתחום.
.
כעת נבדוק את הערכים של הפונקציה בכל הנקודות שקיבלנו:

$$\begin{array}{c} f(1,0)=0 \\ f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\mp\frac{2}{3\sqrt{3}} \\ f(\sqrt{\frac{17}{12}},-\sqrt{\frac{17}{12}})=-\sqrt{\frac{17}{12}}\frac{5}{12} \\ f(\pm\sqrt{\frac{17}{12}},\pm\sqrt{\frac{17}{12}})=\pm\sqrt{\frac{17}{12}}\frac{5}{12} \end{array}$$

ונוכל לסכם שנקודת המקסימום המוחלטת היא: $(\sqrt{\frac{17}{12}},\sqrt{\frac{17}{12}})$.

תרגיל

חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

נסתכל על טור הפונקציות $S(x)=\sum n^2x^n$. אזי הטור שלנו שווה בדיוק ל $S(\frac{1}{2})$. ולכן אם נמצא ביטוי נוח ל$S(x)$ אז נוכל לחשב את סכום הטור בקלות ע"י הצבה.
.
לפני שנמשיך, האם בכלל מותר לנו להציב $x=\frac{1}{2}$? מותר הכוונה ש $\frac{1}{2}$ נמצא בתחום ההתכנסות דהיינו קטן מהרדיוס.

נחשב את הרדיוס: $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|=1 \Rightarrow R=1$ ואכן $\frac{1}{2}\leq 1$.
.

$$S(x)=x\underbrace{\sum n^2x^{n-1}}_{=\sigma(x)}$$

נבצע אינטגרציה על σ, זהו טור חזקות ולכן ניתן לעשות אינטגרציה איבר־איבר:

$$\int\limits_0^x\sigma(t)dt=\int\limits_0^x\sum n^2x^{n-1}=\sum\int\limits_0^x n^2x^{n-1}=\sum n^2\frac{x^n}{n}=\sum nx^n=x\underbrace{\sum nx^{n-1}}_{=h(x)}$$

נבצע אינטגרציה על $h(x)$ ונקבל כמו מקודם

$$\int_0^x h(t)dt = \sum \frac{nx^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

(שימו לב שהטור לא מתחיל מ0 אלא מ1 ולכן הסכום נראה קצת שונה).
סוף סוף הגענו לביטוי פשוט של כל הטורים האלה!!!
כדי לשחזר את $h(x)$ מפה פשוט צריך לגזור:

$$h(x) = \left(\int_0^x h(t)dt\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

וכדי לשחזר את $\sigma(x)$ נציב את $h(x)$ ושוב נגזור:

$$\sigma(x) = \left(\int_0^x \sigma(t)dt\right)' = (xh(x))' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1-x)^4}$$

נציב ונמצא את $S(x)$:

$$S(x) = x\sigma(x) = \frac{x(1-x^{2)}}{(1-x)^4}$$

ועכשיו נציב $x = \frac{1}{2}$ ונקבל ש

$$S = S(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4})}{(\frac{1}{2})^4} = 6$$

תרגיל

מצאו פיתוח של $arctanx$ לטור חזקות סביב 0.
כידוע $arctanx = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. נעזר בזה כדי למצוא פיתוח בקלות:

$$arctanx = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = \sum (-1)^n \int_0^x t^{2n}dt = \sum (-1)^n \left|\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

תרגיל

נגדיר באינדוקיה סדרת פונקציות:

$$f_0(x) = 1$$
$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) + 1$$

הוכח שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \frac{1}{2}]$.

נשים לב שהסדרה היא $1, 1+x, 1+x+x^2, \dots$ ובפרט $f_n = 1+x+x^2+\cdots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ כלומר שכל פונקציה היא סכום חלקי של הטור $\sum^{\infty} x^k$.

ולכן (מהגדרת טור):

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

ואנחנו יודעים מההכרות שלנו עם הטור הזה שהוא מתכנס במ"ש בקטע $[0, \frac{1}{2}]$.

דרך אחרת: להשתמש במשפט דיני. חשוב לשים לב שאכן מתקיים $f_n \leq f_{n+1}$ בקטע שלנו.