שאלת אתגר 5 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

נובמבר 2015

שדות הם ההכללה הטבעית של $\mathbb{R}$ – יש להם ארבע פעולות חשבון שמתנהגות כמו שהיינו רוצים שיתנהגו (טוב, לפחות בדרך כלל). אבל על $\mathbb{R}$ יש לנו עוד מבנים, כמו יחס הסדר (המלא) $\leq$ המוגדר לנו. בתרגיל הזה נשאל את עצמנו על אילו שדות אפשר להגדיר כזה יחס סדר נחמד.

הגדרה 1. שדה סדור הוא שדה $\mathbb{F}$ יחד עם יחס סדר מלא $\leq$ על $\mathbb{F}$ ה"מכבד" את פעולות השדה:

1. לכל $x, y, z \in \mathbb{F}$, אם $x \leq y$ אזי $x + z \leq y + z$. בנוסחה:

$$\forall x, y \in \mathbb{F} : x \leq y \longrightarrow (\forall z \in \mathbb{F} : x + z \leq y + z)$$

2. לכל $x, y, z \in \mathbb{F}$, אם $x \leq y$ וגם $0 \leq z$ אזי $xz \leq yz$. בנוסחה:

$$\forall x, y \in \mathbb{F} : x \leq y \longrightarrow (\forall z \in \mathbb{F} : 0 \leq z \longrightarrow xz \leq yz)$$

אם קיים יחס סדר $\leq$ כך ש-$\mathbb{F}$ עם $\leq$ הוא שדה סדור, אומרים ש-$\mathbb{F}$ הוא **שדה ניתן לסידור**.

דוגמה 2. $\mathbb{Q}$ ו-$\mathbb{R}$ הם שדות סדורים עם יחס הסדר המוכר והאהוב. לכן, $\mathbb{Q}$ ו-$\mathbb{R}$ הם שדות הניתנים לסידור.

שאלה 3. יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור עם יחס הסדר $\leq$. הוכיחו את התכונות הבאות:

א. $0 \leq 1$.

ב. לכל $x \in \mathbb{F}$, $0 \leq x^2$.

ג. לכל $x \in \mathbb{F}$, $0 \leq x$ או $0 \leq -x$.

ד. $\mathrm{char}\,(\mathbb{F}) = 0$.
(**הדרכה**: הניחו בשלילה שהמאפיין חיובי, והסתכלו על האיברים $0, 1, 1+1, \ldots$. הראו שכל אחד קטן מהבא אחריו. כיוון שהמאפיין חיובי, מתישהו מקבלים שוב את 0. הגיעו לסתירה)

ה. מסקנה מסעיף 4: כל שדה סדור הוא אינסופי (כי בשדה סופי, המאפיין חיובי).

הרעיון של השאלה הבאה הוא לאפיין שדות הניתנים לסידור על ידי קבוצת האיברים האי-שליליים שלהם.

שאלה 4. יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהו.

א. נניח כי $\mathbb{F}$ סדור על ידי $\leq$ (כלומר, $\mathbb{F}$ שדה סדור עם $\leq$). נגדיר $P = \{x \in \mathbb{F} | x \geq 0\}$. הוכיחו את התכונות הבאות:

- $0 \in P$.
- P סגורה לחיבור ולכפל. כלומר, לכל $x, y \in P$, $x + y \in P$ וגם $xy \in P$.
- לכל $x \in \mathbb{F}$, $x \in P$ או $-x \in P$.

ב. הוכיחו: אם קיימת $P \subseteq \mathbb{F}$ המקיימת את התכונות הנ"ל, כלומר:

- $0 \in P$.
- P סגורה לחיבור ולכפל. כלומר, לכל $x, y \in P$, $x + y \in P$ וגם $xy \in P$.
- לכל $x \in \mathbb{F}$, $x \in P$ או $-x \in P$.

אזי $\mathbb{F}$ הוא שדה ניתן לסידור, ו-P היא קבוצת האיברים האי-שליליים בו.

שאלה 5. הוכיחו: לא ניתן להגדיר יחס סדר מלא על $\mathbb{C}$ כך ש-$\mathbb{C}$ יהיה שדה סדור.

הדרכה לשאלה 4 סעיף ב'. חשבו כמו ב-$\mathbb{R}$ – $x \leq y \iff 0 \leq y - x$.

הדרכה לשאלה 5. היעזרו בשאלה 4, וחשבו על i.