תרגיל בית 5

1. נניח כי $f, f_n : X \to [0,\infty]$ הינן פונקציות מדידות בממ"ח (X,S,μ). $f_n \to f$ כב"מ ו $\int f_n \to \int f < \infty$. הוכיחו כי $\int_A f_n \to \int_A f$ עבור כל $A \in S$.

פתרון: מכיוון שהפונקציות f_n חיוביות מתקיים כי $f_n 1_A \le f_n$ עבור כל $A \in S$. מכאן שמתקיימים כל התנאים להתכנסות הנשלטת המוכללת ולכן

$$\lim \int_A f_n = \lim \int f_n 1_A = \int \lim f_n 1_A = \int f 1_A = \int_A f$$

2. תהי f פונקציה מדידה לבג. הראו כי קיימת פונקציה מדידה בורל g כך ש $g = f$ כמעט בכל מקום.

פתרון: ראינו כי אם f מדידה לבג אזי קיימת סדרה של פונקציות פשוטות f_n כך ש $f_n \to f$. נסמן $f_n = \sum_{i=1}^{n} c_n 1_{A_i^n}$ כאשר c_n מספרים ממשיים ו A_n קבוצות מדידות לבג.
למדנו שהאיפיון של קבוצות לבג הוא שניתן למצוא לכל קבוצה מדידה לבג A קבוצה מדידה בורל E (G_δ) כך ש $E = A \cup F$, $m(F) = 0$ ו $F \cap A = \varnothing$. מכאן שנוכל למצוא לכל A_i^n קבוצה מדידה בורל E_i^n כך ש $E_i^n = A_i^n \cup F_i^n$, $m(F_i^n) = 0$ ו $F_i^n \cap A_i^n = \varnothing$. כעת נגדיר את הפונקציה הפשוטה $g_n = \sum_{i=1}^{n} d_n 1_{E_i^n}$. מההגדרה של E_i^n פונקציה זו מדידה בורל. כעת נגדיר את הקבוצה $B = \{x : \lim g_n(x) \neq f(x)\}$, ונשים לב כי אם $f_n(x) = g_n(x)$ לכל n אז $x \in B^c$ מכאן ש $B \subseteq B' = \{x : \exists n,\ f_n(x) \neq g_n(x)\}$. נשים לב כי $B' = \bigcup_{i,n} F_i^n$, מכאן ש $m(B) \le m(B') = m\left(\bigcup_{i,n} F_i^n\right) \le \sum_{i,n} m(F_i^n) = 0$. נגדיר את הפונקציה g ע"י $\lim g_n(x) = g(x)$ על B^c ו $g = 0$ על B וכבר ראינו שאז g הינה מדידה בורל שכן g_n הינן כאלו. כמו כן, קל לראות כי $g = f$ כב"מ מכאן ש g הינה הפונקציה הדרושה.

3. (משפט לוסין) תהי $f=1_A$ פונקצית דריכלה בקטע $[0,1]$, כלומר, $A=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0,1]$ כך שהצמצום של f על F הינה פונקציה רציפה ומתקיים $m([0,1]\setminus F)<\varepsilon$.

פתרון: נגדיר את סדרת הרציונאליים ב $\mathbb{R}$ $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ונגדיר את הקטע $I_i=\left(q_i-\varepsilon 2^{-i-1},q+\varepsilon 2^{-i-1}\right)$, ברור כי $m\left(I_i\right)=\varepsilon 2^{-i}$ וכי $m\left(\bigcup_i I_i\right)\le\sum_i m\left(I_i\right)=\varepsilon$. נגדיר את $F=[0,1]\setminus\bigcup_i I_i$ ונשים לב כי , כי הקבוצה F סגורה ואינה מכילה ראציונליים ומכיוון ש $m\left(F\right)=m\left([0,1]\setminus\bigcup_i I_i\right)>1-\varepsilon$ נובע ש $m\left([0,1]\setminus F\right)<\varepsilon$. בנוסף הצמצום של f על F הינה פונקציה קבועה ולכן רציפה. מכאן ש F הינה הפונקציה הנדרשת.