תרגיל 12

1. תהי $Q(v)=0$ שניונית במרחב, כלומר ב $\mathbb{R}^3$ (ולא $\mathbb{R}^2$ כמו שעשינו בכיתה). ותהי $P\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה א"ג. הסבר מדוע שינוי הקואורדינטות $x'=P^t x$ אינו משנה את צורת השניונית.

הסבר: למדנו שכל אופרטור א"ג (במרחב $\mathbb{R}^n$ כללי אפילו) הוא סכום ישר של אופרטורים שהם שיקופים או סיבובים סביב שני צירים, אופרטור היחידה שלא משנה כלום או אופרטור שיקוף (הבלוקים בגודל 2, האחדות והמינוס אחדות בהתאמה). ולכן הפעלת האופרטור על מערכת הקואורדינטות היא סדרה של סיבובים ושיקופים ואלה אינם משנים את הצורה הגיאומטרית של השניוניות.

2. תהיי השניונית $2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz+2x+2y+2z=2$

a. מצא את הצורה הקנונית של השניונית (שניונית מהצורה $ax^2+by^2+cz^2=d$ בעלת אותה צורה גיאומטרית כמו השניונית המקורית)

פתרון: ניתן לתאר את השניוניות בעזרת המשוואה הבאה $v^tAv+\vec{b}^{\,t}v=d$ כאשר $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, d=2$ (תבצעו את הכפל ותראו שמקבלים אותה משוואה).

נלכסן את A א"ג. הע"ע שלה הן $4,1$. מרחבים עצמיים $V_4=span\{(1,1,1)\}, V_1=span\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$. נבצע ג"ש על מנת למצוא בסיסים א"נ ונקבל $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$ בסיס ל V_4, ו $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right\}$ בסיס ל V_1. ולכן

המטריצה הא"ג המלכסנת הינה $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{3}&0&-\sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}$ ולכן $D=P^tAP=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

נבצע חילוף קואורדינטות $v'=P^tv$ ונסמן $v'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. יוצא ש $v=Pv'$ (כי $P^t=P^{-1}$ עבור מטריצות א"ג). ולכן $2=d=v^tAv+\vec{b}^{\,t}v=(Pv')^tA(Pv')+\vec{b}^{\,t}(Pv')=$

$$=(v')^tP^tAPv'+\left(P^t\vec{b}\right)^tv'=(v')^tDv'+\left(P^t\vec{b}\right)^tv'=$$

$$=4(x')^2+(y')^2+(z')^2+2\sqrt{3}x'+\left(\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)z'$$

כי $P^t\vec{b}=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\0\\\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{8}{3}}\end{pmatrix}$

נבצע השלמה לריבוע, ונקבל $4\left(x'+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2-\frac{3}{4}+(y')^2+\left(z'+\left[\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right)^2-\left[\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]^2=2$

נבצע הזזה, $v'\to v''$ כאשר $x''=x'+\frac{\sqrt{3}}{4},y''=y',z''=z'+\left[\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. מותר לבצע הזזה כי הזזה בוודאי לא משנה את הצורה הגיאומטרית של השניונית. נקבל

$$4(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2=2+\frac{3}{4}+\left[\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]^2=3+\frac{4}{9}-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}>0$$

b. מה הצורה הגיאומטרית של השניונית?

תשובה:

השניוניות הזו הינה אליפסואיד, כי אם נחלק בקבוע נקבל את הצורה הקנונית של אליפסואיד $\left(\frac{x''}{a}\right)^2+\left(\frac{y''}{b}\right)^2+\left(\frac{z''}{c}\right)^2=1$ (מכיוון שהקבוע חיובי, ולכן ניתן להוציא ממנו שורש).

3. תהיי השניונית $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=0$, ותהיי $A=\begin{pmatrix}a&d&e\\d&b&f\\e&f&c\end{pmatrix}$ כך ש A מקיימת $|A|<0$ ו $tr(A)>0$. מה הצורה הגיאומטרית של השניונית? (תחשבו)

פתרון: דבר ראשון, ברור שהשניונית הינה מהצורה $v^tAv=0$. A סימטרית ולכן לכסינה א"ג, ולכן הדטרמיננטה שלה שווה למכפלת הע"ע שלה. העקבה שלה $tr(A)$ הינה סכום הע"ע שלה. מכיוון שסכום הע"ע חיובי, אחד הע"ע חייב להיות חיובי. מכיוון שהמכפלה שלילית אחד מהם חייב להיות שלילי והנוסף חייב להיות חיובי וכולם חייבים להיות שונים מאפס. לכן לאחר החלפת קואורדינטות $v'=P^tv$ כמו למעלה, נקבל $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2=0$ נניח בלי הגבלת הכלליות ש $\lambda_1,\lambda_2>0$ ו־ש $\lambda_3<0$ ולכן זו משוואה מהצורה $\left(\frac{x'}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2+\left(\frac{y'}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2-\left(\frac{z'}{\sqrt{|\lambda_3|}}\right)^2=0$ וזו בדיוק הצורה הקנונית של חרוט (Cone).

4. עבור השניוניות הבאות, מצא את הצורות הקנוניות שלהן, ואמור מה הצורות הגיאומטריות שלהם:

הערה: כל הפתרונות יהיו בסגנון הפתרון שפרטתי לעיל, **שימו לב**: אנחנו לא נחליף את שמות המשתנים לאחר שינויי קואורדינטות על מנת להקל על הרישום.

a. $5x^2+8xy+5y^2+1x+3y=1$

פתרון: $A=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$ לאחר החלפת הקואורדינטות עם $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ מקבלים

$x^2+9y^2-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=1$ כי $P^t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ לאחר השלמה לריבוע נקבל

$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}+9\left(y+\frac{\sqrt{2}}{9}\right)^2-\frac{2}{9}=1$ ולכן לאחר הזזה נקבל $x^2+9y^2=\frac{31}{18}$ וזו אליפסה (ע"ע חיוביים, וקבוע חיובי)

b. $2xy+2xz+2yz=2$

פתרון: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, ולכן ע"ע $-1,2$. הו"ע לא מעניינים פה, כי אין חלק ליניארי. לכן לאחר החלפת הקואורדינטות נקבל את השניונית $2x^2-y^2-z^2=2$. נחלק ב-2 לקבל

$\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-x^2=-1$ וזה היפרבולואיד דו יריעתי (או כל תרגום מתאים יותר למונח האנגלי hyperboloid with two sheets).

c. $1x^2+1y^2+2z^2+2xy+2xz+2yz+x+2y+3z=2$

פתרון: $d=2$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. ע"ע $0,2+\sqrt{2},2-\sqrt{2}$ ו $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

ולכן השניונית לאחר החלפת הקואורדינטות היא $P^t\vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{3(1+\sqrt{2})}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{3(1-\sqrt{2})}{2}\end{pmatrix}$

נבצע השלמה לריבוע $(2+\sqrt{2})x^2+(2-\sqrt{2})z^2+\frac{3(1+\sqrt{2})}{2}x+-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{3(1-\sqrt{2})}{2}z=2$

לקבל $(2+\sqrt{2})\left(x+\frac{3(1+\sqrt{2})}{4(2+\sqrt{2})}\right)^2+(2-\sqrt{2})\left(z+\frac{3(1-\sqrt{2})}{4(2-\sqrt{2})}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y=$

$$=2+\frac{9(1+\sqrt{2})^2}{16(2+\sqrt{2})}+\frac{9(1-\sqrt{2})^2}{16(2-\sqrt{2})}$$

לאחר הזזה של $x'=x+\frac{3(1+\sqrt{2})}{4(2+\sqrt{2})},z'=z+\frac{3(1-\sqrt{2})}{4(2-\sqrt{2})}$ אנו מקבלים

$$(2+\sqrt{2})\left(x'\right)^2+(2-\sqrt{2})\left(z'\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2+\frac{9(1+\sqrt{2})^2}{16(2+\sqrt{2})}+\frac{9(1-\sqrt{2})^2}{16(2-\sqrt{2})}\right]\right)$$

נבצע הזזה נוספת $y'=y+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2+\frac{9(1+\sqrt{2})^2}{16(2+\sqrt{2})}+\frac{9(1-\sqrt{2})^2}{16(2-\sqrt{2})}\right]$ ונקבל

$(2+\sqrt{2})\left(x'\right)^2+(2-\sqrt{2})\left(z'\right)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y'=0$ נכפול ב $\sqrt{2}$ לקבל

$(2+2\sqrt{2})\left(x'\right)^2+(2\sqrt{2}-2)\left(z'\right)^2-y'=0$ וזה שווה

$\left(\frac{x'}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)^2+\left(\frac{z'}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}\right)^2-y'=0$ שזו הצורה הקנונית של פרבולואיד אליפטי