# תרגיל #3

10 בפברואר 2013

1. חשב את הפולינומים האופייניים, ערכים עצממים ווקטורים עצמיים של המטריצות הבאות:

(א) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(ב) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$
עבור $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ נתונות.

(ג) מה הקשר בין מטריצות הללו למספרים מרוכבים?

**פתרון:**

(א) חישוב קל מראה שהערכים העצמיים הם $a \pm bi$. כלמר יש ערכים עצמיים אם ורק אם $b = 0$. במקקה ש $b \neq 0$, אין וקטרורים עצמיים ממשיים, במקרה ש $b = 0$ המרחב העצמי הוא $\mathbb{R}^2$ כולו.

(ב) עבור כפל מטריצות, הערכים העצמיים הם $ac - bd \pm (ad - bc)i$, ועבור החיבור הם $a + c \pm (b + d)i$.

(ג) נשים לב - שבעצם קיימת פונקציה חח"ע ועל מ $\mathbb{C}$ למטריצות הנ"ל ששומרת על חיבור וכפל, המוגדרת על ידי $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

2. חשב פולינום אופייני של המטריצות הבאות:

(א)
$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

(ב)
$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & & b \\ b & a & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ & & & & b \\ b & \cdots & & b & a \end{pmatrix}$$

**פתרון:**

(א) נפתח לפי עמודה ראשונה ונקבל $(x-a)^n+(-1)^{n+1}(-b)^n=(x-a)^n-b^n$

(ב) נשים לב ש $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה, עם ערך עצמי $a+b(n-1)$. כמו כן, קל לראות ש $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ הוא ערך עצמי של המטריצה עם ערך עצמי $a-b$. על ידי חישוב, רואים שמרחב העצמי של המטריצה שמתאים לערך העצמי $a-b$ הוא אוסף הפתרונות של המערכת $bx_1+\ldots+bx_n=0$, מרחב וקטורי ממימד $a-b$. לכן, מימד של המרחב העצמי שמתאים ל $a+b(n-1)$ מוכרח להיות 1. סכום המימדים הוא $n$, לכן פולינום האופייני מוכרח להיות $(x-a-(n-1)b)(x-a+b)^{n-1}$.

3. מצא את הפולימום האופייני של

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & & 0\\ 0 & & & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & & a_{n-1}\end{pmatrix}$$

הסק, שלכל פולינום מתוקן $p\in\mathbb{F}[x]$ עם מעלה $n$ קיימת מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש $p=f_A(x)$.

4. נסמן ב $\mathbb{R}_3[x]$ את מרחב כל הפולינומיים ממעלה 3 או פחות מעל שדה הממשיים. תהי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת על ידי $T(f)=[(x+1)f(x)]'$. מצא פולינום אופייני, ערכים עצמיים וריבוי גאומטרי ואלגברי של כל ערך.

**תזכורת:** בתרגול הגדרנו נגזרת של פולינום על ידי

$$(a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0)'=na_n^{n-1}+\ldots a_1$$

5. יהי $\mathbb{F}$ שדה. יהי $f\in\mathbb{F}[x]$, כך ש$\deg f>0$ אנו נאמר ש $f$ הוא אי־פריק אם המחלקים היחידים שלו הם הוא עצמו ו 1 (עד כדי כפל בסלר ב $\mathbb{F}$).

(א) הוכח, אם $f\in\mathbb{F}[x]$ אי פריק, אזי לכל $g,h\in\mathbb{F}[x]$, אם $f$ מחלק את $gh$ אזי $f$ מחלק את $g$ או ש $f$ מחלק את $h$. (רמז ־ מה למדתם על מספרים זרים בתרגול?)

(ב) השתמש בסעיף הקודם על מנת להוכיח שכל פולינום ב $F[x]$ניתן להציג כמכפלה של גורמים אי־פריקים. (רמז: אינדוקציה)

(ג) הראה שהצגה מסעיף הקודם הינה יחידה עד כדי סדר של גורמים ומכפלה שלהם בסקלר.

**פתרון:**

(א) מאלגוריתם אוקלידס לחילוק פולינומים נובע, שהמחלק המשותף המקסימלי של שני פולינומים $f$ ו $g$, $d$ ניתן לבטא על ידי $d = af + bg$ כאשר $a$ ו $b$ הם פולינומים כלשהם. אם $f \mid g$ אזי הטענה נכונה, וסיימנו. אחרת $f$ ו $g$ זרים, וקיימים פולינומים $a$ ו $b$ כך ש $af + bg = 1$. אזי $h = h\cdot 1 = h\cdot(af + bg) = haf+hbg$. קל לראות ש $f \mid haf+hbg = h$.

(ב) באינדוקציה על מעלה של פולינום. עבור פולינום ממעלה $1$ הפולינום הוא אי פריק, ולכן הטענה נכונה. נניח שהטענה נכונה עבור כל פולינום ממעלה $n$. יהי פולינום ממעלה $n+1$. אם הפולינום אי - פריק - סיימנו. אחרת הוא מתפרק לשני פולינומים שמעלתם קטנה או שווה ל $n$, שכל אחד מהם ניתן לבטא כמכפלה של פולינומים אי - פריקים.

(ג) נניח ש $f = p_1p_2\dots p_m = q_1\dots q_k$. (ייתן שיש כפילויות). לפי הסעיף הראשון, $p_1 \mid q_1$ או $p_1 \mid q_2\dots q_k$. אם $p_1 \mid q_2\dots q_k$ הטיעון הקודם נכון עבורו - כלומר $p_i \mid q_j$ עבור $j$ כלשהו. מכיוון ש $q_i$ אי פריק, $q_i = \alpha p_1$, כאשר $\alpha$ הוא סקלר. בלי הגבלת כלליות $p_1 = q_1$. נמשיך באינדוקציה ונקבל את הדרוש.

6. (ממבחן). יהי $V = M_2(\mathbb{R})$. תהי $T : V \to V$ ששולחת כל מטריצה למשוחלפת שלה $T(A) = A^t$.

(א) מצאו את הפולינום האופייני של $T$

(ב) מצאו ערכים עצמיים של $T$. עבור כל ערך עצמי מצאו ריבוי גאומטרי וריבוי האלגברי שלו. האם $T$ לכסינה? (העתקה לכסינה אם ורק אם ריבוי גאומטרי וריבוי האלגברי של כל ערך שווים).

בהצלחה!