תרגול 6

<u>תזכורת משיעור שעבר</u>

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>תרגיל</u>

בדוק התכנסות או התבדרות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot 4^n$.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} > 1$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה, בנוסף $a_1 = 2$ ולכן $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ והטור מתבדר.

<u>משפט</u>

יהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הנדסית שמנתה $q \neq 0$ כך ש $-1 < q < 1$ אז הטור האינסופי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>הוכחה</u>

סדרת הסכומים החלקים היא $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ מכיוון ש $-1 < q < 1$ נקבל ש $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$ ז"א הטור מתכנס.

<u>הערה</u>

באותו אופן ניתן להראות שאם $|q| \geq 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

<u>מבחני השוואה לטורים חיוביים</u>

<u>הגדרה</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא טור חיובי אם קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ $a_n > 0$.

<u>מבחן השוואה ראשון</u>

יהיו נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

אם קיים n_0 טבעי כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n \leq b_n$ אזי:

א. מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובע התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ב. מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובע התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>דוגמה</u>

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$ מתכנס או מתבדר? נתבונן בטור ההנדסי $b_n=\frac{1}{2^n}$ מכיוון ש $q=\frac{1}{2}<1$ נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס, בנוסף $\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{1+2^n}>0$ לכל n טבעי, ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$ מתכנס.

<u>מבחן השוואה שני</u>

יהיו נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ונניח שהגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ קיים. ($b_n\ne 0$ לכל n טבעי)

אזי:

א. אם $0<L<\infty$. שני הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד.

ב. אם $L=0$ אז מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובע התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

ג. אם $L=\infty$ אז מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובע התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

<u>דוגמה</u>

נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}5^n\tan\frac{\pi}{6^n}$ מתכנס. נשים לב שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ מתכנס מכיוון ש a_n סדרה הנדסית עם מנה השווה ל $\frac{5}{6}$.

נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\tan\frac{\pi}{6^n}}{\left(\frac{5}{6}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\frac{\pi}{6^n}}{\frac{1}{6^n}}=\pi$, ולכן הטור מתכנס.

<u>מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיובים</u>

יהי N מספר טבעי ו f פונקציה חיובית מונוטונית יורדת המוגדרת בקטע $[N,\infty)$, אזי סכום הסדרה החיובית $\sum_{n=N}^{\infty}f(n)$ מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_N^{\infty}f(x)dx$ הוא סופי.

<u>הגדרה</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ נקרא טור הרמוני.

<u>משפט</u>

טור הרמוני מתבדר.

<u>הוכחה</u>

נשתמש במבחן האינטגרל. הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ היא פונקציה חיובית מונוטונית יורדת המוגדרת בקטע $\left[1,\infty\right)$, $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_{1}^{\infty}=\infty$ ולכן הטור ההרמוני מתבדר.

<u>הערה</u>

באותו אופן ניתן להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אם ורק אם $\alpha>1$.

<u>תרגיל</u>

חקור התכנסות של הטור מספרי חיובי הבא: $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\left(\ln n\right)}$.

<u>פתרון</u>

נשתמש במבחן האינטגרל. הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{x\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)}$ היא פונקציה חיובית מונוטונית יורדת המוגדרת בקטע $\left[3,\infty\right)$, $\int_{3}^{\infty}\frac{1}{x\ln x\cdot\ln\left(\ln x\right)}dx=\left[\ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)\right]_{3}^{\infty}=\infty$ ולכן הטור מתבדר.

<u>סיכום</u>

כדי לבדוק האם טור מתכנס יש לבצע את השלבים הבאים:

1. לבדוק האם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אם כן ממשיכים לשלב הבא, אם לא עוצרים הטור מתבדר.
2. בודקים האם ניתן לחשב את האיבר הכללי בסדרת הסכומים החלקים ומחשבים את הגבול $\lim_{n\to\infty}S_n$ אם הגבול קיים והתוצאה סופית הטור מתכנס, אחרת הטור מתבדר. אם לא ניתן לחשב את S_n עוברים לשלב הבא.
3. בודקים האם הטור חיובי.
   - א. אם לא אז נלמד בהרצאה הבאה כיצד לקבוע האם טור שאינו חיובי מתכנס או מתבדר.
   - ב. אם כן אז משתמשים באחד מהמבחנים הבאים:
     - i. מבחן ההשוואה הראשון.
     - ii. מבחן ההשוואה השני.
     - iii. מבחן האינטגרל.
     - iv. מבחן ראבה.

<u>הערה</u>

אם עבור הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ קיים n_0 טבעי כך שלכל $n>n_0$ $a_n<0$. אז ניתן להשתמש במבחני השוואה עבור טורים חיובים.

<u>מסקנה</u>

נשאר לבחון בהרצאה הבאה טורים עם אינסוף איברים חיובים ואינסוף איברים שליליים.

טורים מספרים המשך

מטרת ההרצאה: לבחון התכנסות והתבדרות של טורים לא חיובים ולא שליליים. ז"א טורים עם אינסוף איברים חיובים ואינסוף איברים שליליים.

משפט

אם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, אזי גם הטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

דוגמה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ מתכנס מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ מתכנס.

הערה

הטענה ההפוכה לא נכונה. אנחנו נראה בהמשך ההרצאה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס, אבל ראינו בהרצאה הקודמת שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ מתבדר.

הגדרה

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ($a_n>0$ לכל n טבעי) נקרא טור מתחלף.

משפט לייבניץ

הטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ מתכנס אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ב. $a_n>a_{n+1}$ לכל n טבעי.

דוגמה

נתבונן בטור המתחלף $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. $a_n=\frac{1}{n}$. נשים לב ששני התנאים ממשפט לייבניץ מתקיימים מכיוון ש $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ובנוסף $a_n>a_{n+1}$ לכל n טבעי.

הערה

אם תנאי א לא מתקיים אז הטור מתבדר.
אם תנאי א מתקיים אבל תנאי ב לא מתקיים אז לא ניתן לדעת ממשפט לייבניץ אם הטור מתכנס או לא.

תרגיל

האם הטור $\frac{1}{65}-\frac{2}{70}+\frac{3}{75}-\frac{4}{80}+\frac{5}{85}-.....$ מתכנס או מתבדר? נמק את תשובתך.

פתרון

נשים לב שהטור מתחלף וניתן לרשום אותו באופן הבא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5n+60}$ ולכן $a_n=\frac{n}{60+5n}$ קיבלנו ש

$\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{5}\neq 0$ ולכן לא ניתן להשתמש במשפט לייבניץ. בכל אופן $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5n+60}\neq 0$ ולכן על פי המשפט מההרצאה הקודמת נקבל שהטור מתבדר.

הגדרה

נאמר שהטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט, אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

אם הטור הכללי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר נאמר שהטור מתכנס בתנאי.

תרגיל

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{25n+3}{n(2n+1)}$ האם הטור מתכנס (בתנאי או בהחלט) או מתבדר.

פתרון

נבדוק תחילה האם הטור מתכנס בהחלט ז"א נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{25n+3}{n(2n+1)}$ מתכנס. נשתמש במבחן ההשוואה השני כאשר ניקח את הטור ההרמוני.

נשים לב ש $L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{25n+3}{n(2n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{25n+3}{2n+1}=12.5$ מכיוון ש $0<L<\infty$ והטור ההרמוני מתבדר

נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{25n+3}{n(2n+1)}\right|$ מתבדר ולכן הטור לא מתכנס בהחלט. הטור הוא טור מתחלף.

נבדוק האם התנאים של משפט לייבניץ מתקיימים.

1. $0<\lim_{n\to\infty}\frac{25n+3}{n(2n+1)}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{25n}{n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{25}{(2n+1)}=0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

2. נבחן את הפונקציה

$$f(x)=\frac{25x+3}{x(2x+1)}=\frac{25x+3}{2x^2+x}$$

$$f'(x)=\frac{25(2x^2+x)-(4x+1)(25x+3)}{(2x^2+x)^2}=\frac{50x^2+25x-100x^2-37x-3}{(2x^2+x)^2}=\frac{-50x^2-37x-3}{(2x^2+x)^2}$$

הנגזרת שלילית לכל מספר חיובי ולכן הפונקציה יורדת לכל x חיובי, ז"א $a_n>a_{n+1}$ לכל n טבעי.
תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס בתנאי.