

דוגמאות נוספות לחבורות

$GL_n(\mathbb{F})$ – מטריצות הפיכות מגודל $n \times n$ מעל שדה \mathbb{F} .

$GL_n(\mathbb{F})$ היא חבורת הסימטריות של המרחב הווקטורי \mathbb{F}^n .

נבחר בסיס $C = \{e_1, \dots, e_n\}$ עבור $V = \mathbb{F}^n$.

חבורת הסימטריות של V השומרות על C כקבוצה היא חבורת מטריצות הפרמוטציה, והיא איזומורפית ל- S_n .

כך, הגדרנו שיכון:

$$S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{F})$$

דוגמה

מתקיים:

$$\{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid \forall 1 \leq i \leq n: A(Fe_i) = Fe_i\} = \{\text{מטריצות אלכסוניות}\}$$

נתבונן בדגל:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{F}^n$$

כאשר לכל $1 \leq i \leq n$:

$$V_i := \text{span} \{e_1, \dots, e_i\}$$

מתקיים:

$$B_n(\mathbb{F}) := \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid \forall 1 \leq i \leq n: A(V_i) = V_i\}$$

$$= \{\text{מטריצות משולשיות}\}$$

מתקיים:

$$\{\text{מטריצות אלכסוניות}\} \triangleleft B_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F})$$

■

הערה

קיים הומומורפיזם:

$$\det : GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^*$$

מתקיים :

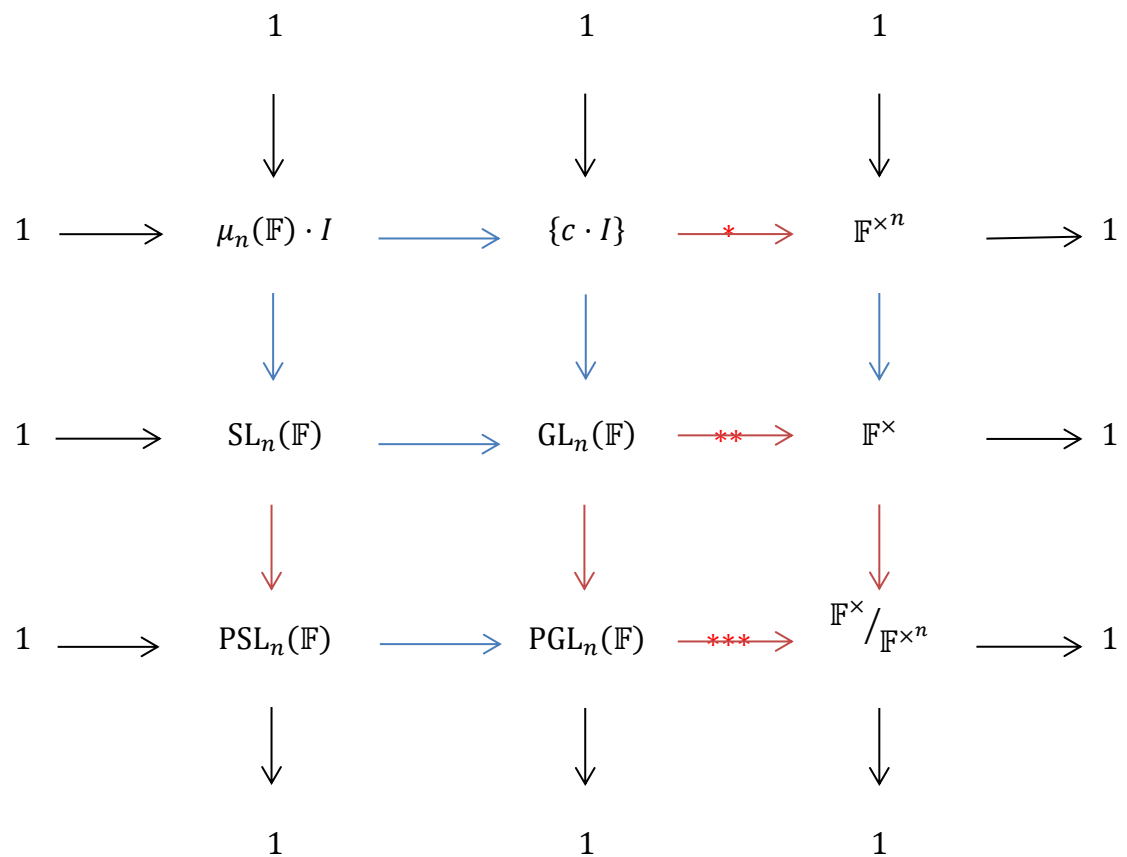
$$\ker(\det) = SL_n(\mathbb{F})$$

לכן :

$$GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^*$$

הערה

נבנה דיאגרמה :



מבנה הדיאגרמה :

→ : הומומורפיזם חד-חד-ערכי (מונומורפיזם ; שיכון).

→ : הומומורפיזם על (אפימורפיזם ; כיסוי).

* : $()^n$.

.det : **

.det : ***

כל שורה ועמודה היא מהצורה:

$$1 \rightarrow N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/N \rightarrow 1$$

■

הערה

נרצה להבין את ההצמדות של $B_n(\mathbb{F})$, כלומר, חבורות מהצורה:

$$g \cdot B_n(\mathbb{F}) \cdot g^{-1}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} x \in gB_n(\mathbb{F})g^{-1} &\Leftrightarrow g^{-1}xg \in B_n(\mathbb{F}) \\ &\Leftrightarrow (g^{-1}xg)(V_i) = V_i \\ &\Leftrightarrow x(gV_i) = gV_i \end{aligned}$$

יהי דגל:

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{n-1} \subset W_n = \mathbb{F}_n$$

ניתן לבחור בסיס $\{u_1, \dots, u_n\}$ כך ש:

$$W_i = \text{span} \{u_1, \dots, u_i\}$$

קיימת העתקה לינארית יחידה כך ש:

$$g(e_i) = u_i$$

לכן:

$$g(V_i) = W_i$$

כעת:

$$\{x \mid x(W_i) = W_i\} = gB_n(\mathbb{F})g^{-1}$$

■