פתרון תרגיל 8 מרוכבות תיכוניסטים תשע"ח

9 ביוני 2018

1. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ מתאפסת כאשר $\sin z = 0$, כלומר $z = \pi k$ עבור k שלם. נגזור:

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

הנגזרת לא מתאפסת באף אחת מהנקודות $z = \pi k$ ולכן כולם אפסים פשוטים.

2. קודם כל, כל הפונקציות הקבועות מקיימות את התנאי.
כעת, אם f שלמה ולא קבועה, הקבוצה $f(\mathbb{C})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$. מה זה נותן לנו? כל נקודה בקבוצה $\mathbb{C}$ היא נקודת הצטברות של $f(\mathbb{C})$. לפי הנתון, לכל $a \in f(\mathbb{C})$ מתקיים $f(a) = a$ ולכן לפי משפט היחידות הפונקציה f מקיימת:

$$f(z) = z$$

הפונקציה מקיימת את דרישות התרגיל, וסה"כ הפונקציות השלמות שמקיימות את התנאי $f(z) = f(f(z))$ הן הפונקציות הקבועות ופונקציית הזהות.

3. נשחק עם הנתון:

$$f\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}-1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

הפונקציה האנליטית $g(z) = (z-1)\,z$ מקיימת גם היא: $g\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{n}-1\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$.
לכן, לפי משפט היחידות:

$$f(z) = g(z) = z^2 - z$$

4. שוב, נשחק קצת:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$$

הפונקציה $g(z) = \frac{z}{z+1}$ מקיימת גם היא: $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$; g אנליטית בעיגול היחידה הפתוח ולכן: $f(z) = g(z)$, לפי משפט היחידות.

5. לכל z על מעגל היחידה הפונקציה תקיים: $f(z)=0$; לפי משפט היחידות, $f=0$ וזו סתירה (פונקציית האפס לא מקיימת $f(z)=|1-|z||$ לכל z מרוכב).

6. ראשית, מרציפות f נקבל:

$$|f(0)|=\left|f\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\right)\right|=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n^n}=0$$

כלומר $f(0)=0$. נראה ש־0 אפס מסדר אינסופי. נניח בשלילה ש־0 הוא אפס מסדר k, כלומר קיימת g אנליטית המקיימת $f(z)=z^kg(z)$ כך ש: $g(0)\neq 0$. אבל:

$$|g(0)|=\left|g\left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\right)\right|=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^k}\right|\le\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n^k}{n^n}=0$$

וסתירה. לכן 0 הוא אפס מסדר אינסופי. ל־f יש אפס מסדר אינסופי, ולכן $f=0$.

7. אם f שלמה אז גם f'' שלמה, וכך גם סכומן; לכן, לפי משפט היחידות נקבל שהפונקציה f צריכה לקיים:

$$f''(z)+f(z)=0$$

זו מד"ר ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים; המשוואה האופיינית היא $r^2+1=0$ כלומר $r=\pm i$.
בניגוד למקרה הממשי, כאן אין צורך להפריד לטריגונומטריות, ולכן:

$$f(z)=C_1e^{iz}+C_2e^{-iz}$$