בס"ד

א' אלול (31.8.2011)

<u>אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"א</u>
<u>מועד א'</u>

אורך המבחן : שעתיים וחצי.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

יש לצטט כל משפט שאתם משתמשים בו !!!

<u>**חלק א':** שאלות הוכחה: - יש לענות על אחת משתי השאלות הבאות:</u>

1. נסח והוכח את משפט המימדים.
2. יהיו $A,B\in F^{n\times n}$. הוכיחו $BA=I \Leftrightarrow AB=I$

<u>**חלק ב':** יש לענות על 3 מתוך 4 השאלות הבאות:</u>

<u>שימו לב: שאלות 3 ו-4 הן שאלות הוכחה והניקוד עליהן הוא 30 נק' לשאלה. שאלות 5-6 הן שאלות חישוב והניקוד עליהן הוא 25 נק' לשאלה. מי שיענה על שאלות ההוכחה יכול לקבל לכל היותר 105 ואילו מי שיבחר רק אחת מהן יכול לקבל לכל היותר 100 נקודות.</u>

3. הוכח או הפרך (הפרכה=דוגמה נגדית!)
   א. תהינה : $A\in\mathbb{R}^{6\times5}, B\in\mathbb{R}^{5\times6}$. אזי $|AB|=0$. (10)
   ב. יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ כך ש A הפיכה לכל וקטור $b\neq 0$, ל $Bx=b, ABx=b$ אותם פתרונות. (10)
   ג. V מ"ו, $U_1,U_2,U_3\leq V$. אם $U_1\oplus U_2=V$ ו $U_1\oplus U_3=V$ אזי $U_3=U_2$. (10)

4. תהי $T:V\to V$ הע"ל המקיימת $T^2=Id$.
   א. הוכיחו : T הפיכה. (5)
   ב. הוכיחו ש $\ker(I-T)=\mathrm{Im}(I+T), \quad \ker(I+T)=\mathrm{Im}(I-T)$. (10)
   ג. הוכיחו כי $V=\ker(I+T)\oplus\ker(I-T)$ (10)
   ד. חשבו את המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס $B\subseteq V$ המורכב מאיחוד שני הבסיסים של $\ker(I+T),\ker(I-T)$. (5)

5. אין קשר בין הסעיפים:
   א. פתרו את המשוואה $\frac{1}{z}-4|z|=0$ ($z\in\mathbb{C}$). (8)
   ב. פתרו מעל $\mathbb{Z}_7$: $x^4+x^3-x^2+3x+2=0$. (7)
   ג. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ סימטרית והפיכה שחלק מרכיביה ידועים וחלקם לא נתון ש $A=\begin{pmatrix} * & -1 & * \\ * & * & 4 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix} * & -3 & * \\ * & * & 1 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$. מצאו את האיברים המסומנים ב * וכתבו את המטריצות המלאות. (10)

6. נתונות הקבוצות $B=\{(1,-1,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\subseteq\mathbb{R}^3$ ו $C=\{(2,1),(1,1)\}\subseteq\mathbb{R}^2$

כמוכן נתונה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ הע"ל המוגדרת לפי $T(x,y,z)=(x-y+z,x+2y-z)$

א. הוכיחו כי C,B בסיסים של $\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2$ בהתאמה תוך שימוש בדטרמיננטה.

ב. חשבו $[T]_C^B$.

ג. נתונה $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $[S]_C^B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 8 & -6 & -1\end{pmatrix}$, מצאו $S(x,y,z)=$.

ד. מצאו $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך ש $HT=S$.

בהצלחה!