תרגיל 5 באינפי 3

1. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות:

(א) $f(x,y)=x^3+3y^2-\frac{x}{y}$

(ב) $f(x,y)=e^{cos(xy)}$

(ג) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(ד) $f(x,y,z)=ln(x^3+y^3-z^3)$

2. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה. האם $f_x^{'}$ רציפה ב $(0,0)$? האם $f_y^{'}$ רציפה ב $(0,0)$?

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3. באילו נקודות במישור הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות? הוכח. (שימו לב שהשאלה היא לא רק לגבי $(0,0)$ אלא לגבי כל הנקודות במישור).

(א) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(ב) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(ג) $f(x,y)=\ln(x^4+y^6+1)$.

(ד) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{y^2}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

4. נגדיר את $f(x,y)=(xy)^{\frac{2}{3}}$ על כל המישור $\mathbb{R}^2$.

(א) מצא את הנגזרת $f_x^{'}(x,y)$ בכל נקודה בה היא קיימת.

(ב) האם $f_x^{'}(x,y)$ חסומה בסביבת $(0,0)$?

(ג) הוכח כי $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

5.

(א) תהי $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאביליות בנקודה $(0,0)$. נגדיר

$$h(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & xy>0\\ 0 & xy\leq 0\end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$f(0,0)=0,\quad f_x^{'}(0,0)=0,\quad f_y^{'}(0,0)=0$$

אז $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

(ב) תהינה $f(x,y)$ ו$g(x,y)$ שתי פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה $(0,0)$. נגדיר

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy > 0 \\ g(x,y) & xy \le 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$g(0,0) = f(0,0), \quad g_x^{'}(0,0) = f_x^{'}(0,0), \quad g_y^{'}(0,0) = f_y^{'}(0,0)$$

אז $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. (הערה: הטענה ההפוכה לטענה זו גם נכונה, מי שרוצה מוזמן לנסות להוכיח - מומלץ להשתמש בנגזרות מכוונות).

.6

(א) נגדיר משטח על ידי

$$z = x^2 + y^2$$

מצא נקודה על משטח זה, שבה המישור המשיק למשטח מאונך לוקטור $(2,1,-2)$. (שימו לב שהתשובה צריכה להיות נקודה ב $\mathbb{R}^3$).

(ב) נגדיר משטח על ידי

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

כאשר $0 < a \in \mathbb{R}$. בנקודה P כלשהיא שעל המשטח, מעבירים מישור משיק למשטח. מישור זה חותך את ציר x בנקודה P_x את ציר y בנקודה P_y ואת ציר z בנקודה P_z. (שימו לב ש $P_x, P_y, P_z \in \mathbb{R}^3$). הוכיחו כי $||P_x|| + ||P_y|| + ||P_z||$ הוא סכום קבוע שאינו תלוי בנקודה שבה העברנו מישור משיק. מצא סכום זה (כפרמטר של a).