תרגיל 8 - לינארית

1) תהא המכפלה הפנימית עבור $\mathbb{C}^3$ המוגדרת באופן הבא:
$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3$.

חשב את המכפלה הפנימית של $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$ עם:

א. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ב. $\begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 3i \end{pmatrix}$.

ג. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ד. $\begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

2) הוכיחו את ההכללה לתכונה "כמעט לינאריות ברכיב השני":
$\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\bar{\beta}_j \langle v_i, w_j\rangle$.

3) יהי $V=\mathbb{R}^n$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ופונקציה $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:
$\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$. הוכח שהפונקציה הנ"ל נורמה.

4) בהינתן V ממ"פ אזי נגדיר את ה"נורמה המושרת מהמכפלה הפנימית" באופן הבא:
לכל $v\in V$ $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$. הוכיחו כי הנורמה המושרת אכן נורמה.

5) התת מרחב הניצב ל S מוגדר להיות $S^\perp := \{v\in V \mid \forall u\in S : \langle u,v\rangle = 0\}$.
הוכח:

א. $S^\perp$ הינו תת מרחב.

ב. $S^\perp = [Span(S)]^\perp$.

בהצלחה!