פתרון מבחן מועד ב – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 07/03/19

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(3x)\arctan(x)}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(3x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\to 2}\cdot 3\cdot\underbrace{\frac{\arctan(x)}{x}}_{\to 1}=6$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+\ln(x)}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+\ln(x)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\ln(x)}{e^x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\{\infty\cdot 1\}=\infty$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}$

$$\lim\sqrt[n]{n^2+1}=\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}=\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\{1^2\cdot 1^0\}=1$$

2.

א. חשבו את $\int\frac{6x^3+12x+6}{\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)}dx$.

מדובר באינטגרל על פונקציה רציונאלית. דבר ראשון נשים לב כי דרגת המונה שווה לדרגת המכנה ולכן <u>צריך</u> לבצע חילוק פולינומים.

ראשית נפתח סוגריים במכנה ונקבל x^3-1

$$
\begin{array}{l}
6 \\
-------- \\
6x^3+12x+6|\ x^3-1 \\
6x^3-6 \\
------ \\
\quad 12x+12
\end{array}
$$

קיבלנו

$$\frac{6x^3+12x+6}{x^3-1}=6+\frac{12x+12}{x^3-1}$$

כעת נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{12x+12}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$12x+12=A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)$$

נציב $x=1$

$$24=3A\rightarrow A=8$$

נציב $x=0$

$$12=8-C\rightarrow C=-4$$

נשווה את המקדמים של x^2:

$$0=8+B\rightarrow B=-8$$

קיבלנו

$$\frac{12x+12}{x^3-1}=\frac{8}{x-1}+\frac{-8x-4}{x^2+x+1}$$

נטפל באינטגרל של השבר החלקי עם הגורם האי פריק הריבועי

$$-4\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=-4\ln(x^2+x+1)$$

סה"כ התשובה היא

$$\int\frac{6x^3+12x+6}{x^3-1}dx=6x+8\ln|x-1|-4\ln(x^2+x+1)+C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2+\sin\left(\sqrt{x}\right)}dx$.

אפס היא הנקודה הבעייתית, מדובר באינטגרל חיובי, נעשה מבחן השוואה.

נעשה השוואה עם $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ המתכנס כי $\frac{1}{2}<1$.

נחשב את גבול מנת הפונקציות בנקודה הבעייתית:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x}{x^2+\sin\left(\sqrt{x}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0} e^x\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2+\sin\left(\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 0} e^x\cdot\frac{1}{x^{1.5}+\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}}=1$$

לכן האינטגרלים חברים, וגם האינטגרל בשאלה <u>מתכנס</u>.

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x+x=\sin(x)$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=e^x+x-\sin(x)$$

$$h'(x)=e^x+1-\cos(x)\geq e^x+0>0$$

כלומר $h(x)$ עולה תמיד, ולכן יש לכל היותר פתרון אחד.

נחשב גבולות

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1+\frac{x}{e^x}-\frac{\sin(x)}{e^x}\right)=\infty$$

ולכן יש נקודה x_2 בה $h>0$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x+x-\sin(x)=\{0-\infty-\text{חסומה}\}=-\infty$$

ולכן יש נקודה x_1 בה $h<0$

כעת h רציפה כצירוף אלמנטריות רציפות ולכן לפי ערך הביניים היא חותכת את הציר בין x_1,x_2

סה"כ פתרון יחיד למשוואה.

ב. הוכיחו שקיים $a\in\mathbb{R}$ עבורו יש פתרון יחיד למשוואה $e^x+\frac{x^2}{2}+\cos(x)=a$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$g(x)=e^x+\frac{x^2}{2}+\cos(x)-a$$

$$g'(x) = e^x + x - \sin(x)$$

כלומר הנגזרת של g היא בדיוק h מסעיף קודם.

על h גילינו שהיא עולה תמיד, וחותכת את הציר בנקודה כלשהי שנסמנה c.

בתחום $(-\infty, c]$ מתקיים כי $h < 0$ כלומר $g' < 0$ ולכן g יורדת בתחום זה.

באופן דומה g עולה בתחום $[c, \infty)$.

לכן סה"כ g מקבלת את המינימום שלה בנקודה $x = c$

אם נדאג לכך ש $g(c) = 0$ אז זה יהיה הפתרון היחיד, כי אחריו ולפניו הפונקציה גדולה יותר.

$$g(c) = 0$$

$$e^c + \frac{c^2}{2} + \cos(c) - a = 0$$

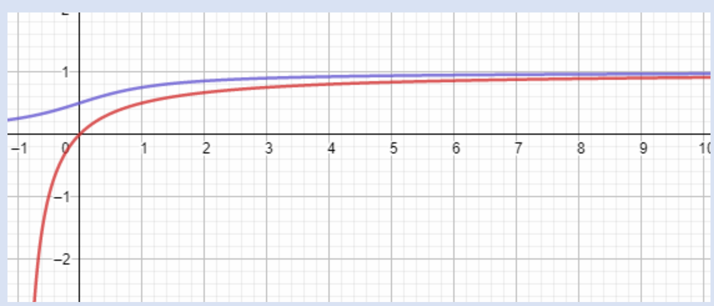
ולכן נבחר

$$a = e^c + \frac{c^2}{2} + \cos(c)$$

4. תהי פונקציה f המקיימת $f(x) > 0$ וגם $f''(x) < 0$ לכל $x > 0$.

א. מצאו דוגמא עבורה $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ או הוכיחו שלא קיימת כזו.

ציור רעיוני:



הפונקציות הן

$$f(x) = \frac{\arctan(x) + \frac{\pi}{2}}{\pi}, \quad g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

קל לוודא שהן מקיימות את כל הנתונים (וכמובן שצריך לעשות זאת בשעת מבחן).

ב. מצאו דוגמא עבורה $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ או הוכיחו שלא קיימת כזו.

נב"ש שיש פונקציה כזו.

כיוון שהנגזרת השנייה שלילית, הנגזרת הראשונה יורדת.

האם ייתכן שהנגזרת הראשונה תמיד גדולה או שווה אפס?

לא, כי אז f עולה, וכיוון שהיא חיובית היא לא תוכל לשאוף לאפס.

לכן קיימת נקודה x_0 בה $f'(x_0)<0$

כיוון שהנגזרת תמיד יורדת, לכל $x>x_0$ מתקיים כי $f'(x)<f'(x_0)$

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=f(x)-f'(x_0)x$$

כעת, h פונקציה שנגזרתה שלילית (הרי $h'(x)=f'(x)-f'(x_0)$) , ולכן היא תמיד יורדת אחרי x_0.

כלומר לכל $x>x_0$ מתקיים כי

$$h(x)<h(x_0)$$

$$f(x)-f'(x_0)x<f(x_0)-f'(x_0)x_0$$

$$f(x)<f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$$

כיוון ש $f'(x_0)<0$ הישר מצד ימין חותך את הציר ושלילי החל משלב מסוים בסתירה לכך שf תמיד חיובית.

(צד ימין הוא בעצם המשיק בנקודה, וכיוון שהפונקציה "בוכה" היא קטנה מהמשיק)

5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1}=a_n^2$.

נפתור את התרגיל באמצעות טריק – נזהה את הנוסחא המפורשת לסדרה.

$$a_1, a_1^2, a_1^4, a_1^8, \ldots$$

נוכיח באינדוקציה כי לכל n

$$a_n=(a_1)^{2^{n-1}}$$

בדיקה: עבור $n=1$ ברור

יהי n עבורו $a_n=(a_1)^{2^{n-1}}$ אזי

$$a_{n+1}=a_n^2=\left((a_1)^{2^{n-1}}\right)^2=(a_1)^{2\cdot 2^{n-1}}=(a_1)^{2^n}$$

א. נניח כי $a_1 = \frac{1}{2}$, מצאו את גבול הסדרה.

לפי עבודת השטח המקדימה

$$a_n = \frac{1}{2^{2^{n-1}}} \to 0$$

ב. נניח כי $a_1 = 2$, מצאו את גבול הסדרה.

באופן דומה

$$a_n = 2^{2^{n-1}} \to \infty$$

פתרון נוסף לשאלה:

נפתור את השאלה עבור $a_1 = c > 0$ כללי.

ראשית אנחנו רוצים לדעת אם הסדרה עולה או יורדת ואז היא מונוטונית ונוכל להעזר בזה.

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n = a_n(a_n - 1)$$

זה יהיה חיובי אם $a_n > 1$ או $a_n < 0$ (לפי הפרבולה $x(x-1)$)

זה יהיה שלילי אם $0 < a_n < 1$

אבל! לא נתון לנו מידע על **כל** הסדרה, אלא על האיבר הראשון בלבד.

נחלק למקרים, ונוכיח באינדוקציה:

אם $c > 1$ נרצה להוכיח שלכל n מתקיים כי $a_n > 1$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה.

בדיקה $a_1 = c > 1$. יהי n עבורו $a_n > 1$ ולכן גם $a_{n+1} = a_n^2 > 1$.

באופן דומה אם $c < 1$ אזי לכל n מתקיים כי $0 \leq a_n < 1$ ולכן הסדרה מונוטונית יורדת.
(הסדרה אי שלילית כי האיבר הראשון חיובי, וכל איבר אחר הוא ריבוע של מספר).

ואם $c = 1$ הסדרה קבועה 1.

אז מה הגבול בכל אחד מן המקרים?

ראשית, אם $c = 1$ גבול הסדרה הקבועה אחד, הוא אחד.

אם $c > 1$. הסדרה עולה ולכן או שהיא חסומה ומתכנסת לגבול סופי, או שאינה חסומה ושואפת לאינסוף.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, נסמן את גבולה הסופי ב$a_n \to L \in \mathbb{R}$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n^2$$

$$L = L^2$$

$$L(L-1) = 0$$

והאפשרויות הן $L = 0,1$.

כיוון שהסדרה עולה, הגבול שלה גדול או שווה לאיבר הראשון שגדול ממש מאחד! לכן <u>שני</u> הגבולות בלתי אפשריים, ולכן הסדרה אינה חסומה, ולכן מתקיים כי $a_n \to \infty$.

אם $0 < c < 1$. הסדרה יורדת, וכיוון שהיא אי שלילית היא חסומה מלמטה ולכן שואפת לגבול סופי!

נסמן $a_n \to L$ נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה ונקבל כי

$$L = 0,1$$

אבל $L \neq 1$ כי האיבר הראשון קטן מאחד, והסדרה יורדת, ולכן הגבול קטן או שווה לאיבר הראשון שקטן מאחד.

סה"כ במקרה זה $a_n \to 0$

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \dfrac{\tan\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \tan\left(\frac{n}{n}\right)}{n}$

$$a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \tan\left(\frac{k}{n}\right)$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \tan(x)$ הרציפה ב$[0,1]$, ולכן לפי המשפט שלמדנו גבול סדרת סכומי הרימן הזו הוא האינטגרל המסויים:

$$a_n \to \int_0^1 \tan(x)\,dx$$

$$\int_0^1 \tan(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \left\{\begin{matrix} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x)\,dx \\ x = 0 \to t = 1 \\ x = 1 \to t = \cos(1) \end{matrix}\right\} = -\int_1^{\cos(1)} \frac{1}{t}dt = -[\ln|t|]_1^{\cos(1)}$$
$$= -\ln|\cos(1)| + \ln|1| = \ln(\cos(1))$$

ב. קרבו את $\sqrt[3]{9}$ עד כדי שגיאה של $\frac{1}{100}$.

נעשה קירוב טיילור של $f(x)=\sqrt[3]{x}$ סביב הנקודה המצוייה $x_0=8$ בנקודה הרצוייה $x=9$

ננחש $n=3$

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$f'''(x)=\frac{10}{3^3}x^{-\frac{8}{3}}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-80}{3^4}x^{-\frac{11}{3}}$$

קיימת $8<c<9$ כך ש

$$R_3=\frac{\frac{-80}{3^4}\cdot c^{-\frac{11}{3}}}{4!}(9-8)^4$$

$$|R_3|=\frac{10}{3^5}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{c}\right)^{11}}<\frac{10}{3^5}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^{11}}=\frac{10}{3^5\cdot 2^{11}}<\frac{1}{100}$$

כאשר באי השיוויון הראשון משמאל הקטנו את המכנה ולכן הגדלנו את הביטוי.

כעת פולינום הטיילור הוא

$$P_3(x)=\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}\cdot(x-8)-\frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^5}}{2!}(x-8)^2+\frac{\frac{10}{3^3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^8}}{3!}(x-8)^3$$

ולכן הקירוב הוא

$$\sqrt[3]{9}=f(9)\approx P_3(9)=2+\frac{1}{3\cdot 2^2}-\frac{2}{9\cdot 2!\cdot 2^5}+\frac{10}{3^3\cdot 3!\cdot 2^8}$$