

תורת המשחקים - שיעור 4

משחקים אסטרטגיים "רציפים" ושיווי משקל נאש

משחק המשקיעים

- ▶ זהו ניסוי ב crowd funding (מיזם הממומן ע"י הרבה השקעות קטנות).
- ▶ השחקנים: אתם.
- ▶ אסורה תקשורת בין השחקנים!
- ▶ אסטרטגיות: להשקיע 0 ש"ח או להשקיע 10 ש"ח.
- ▶ תשלומים:
 - מי שמשקיע 0 ש"ח מקבל 0 ש"ח.
 - אם יותר מ 90% משקיעים, אזי מי שהשקיע 10 ש"ח יקבל רווח נקי של 5 ש"ח.
 - אם פחות מ 90% משקיעים, אזי מי שהשקיע 10 ש"ח מאבד את כל השקעתו (כלומר הפסד של 10 ש"ח).

ניתוח המשחק

- ▶ מהן נקודות שיווי משקל נאש במשחק?
- ▶ תשובה: יש שתי נקודות שיווי משקל נאש – כולם משקיעים או כולם לא משקיעים.
- ▶ הסבירו מדוע אלה נקודות שיווי משקל, ומדוע אף וקטור אסטרטגיות אחר אינו נקודת שיווי משקל.
- ▶ נשחק שוב את המשחק...
- ▶ יש "נטייה" למשחקים להתכנס לנקודות שיווי משקל נאש.

האם משחק המשקיעים קורה במציאות?

BANK RUN ▶

- אם המשקיעים מאבדים אמון בבנק, כולם באים למשוך את הכסף שלהם בבת אחת והבנק קורס.
- אם כולם משקיעים אז הבנק רווחי ויכול לתת ריביות גבוהות יותר על תכניות חסכון.
- אנחנו רואים שבמשחק שיש בו מספר נקודות שיווי משקל יש חשיבות לתקשורת בין השחקנים.
- יש מקום לדבר על **מנהיגות** - אדם אחד מסוגל לשכנע קבוצה גדולה של שחקנים לבחור בנקודת שיווי משקל מסויימת.

חזרה על ההגדרות משיעור 3

▶ הגדרנו נקודת שיווי משקל נאש כוקטור אסטרטגיות x

= (x_1, \dots, x_n) המקיים שאסטרטגיה x_i היא תגובה

מיטבית לוקטור x_{-i} לכל $1 \leq i \leq n$.

▶ אמרנו שהאסטרטגיה $y_i \in S_i$ היא תגובה מיטבית של

שחקן i כנגד x_{-i} אם לכל אסטרטגיה אחרת $z_i \in S_i$

מתקיים

$$u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(z_i, x_{-i})$$

תגובה מיטבית - אפיון נוסף + סימון

- ▶ במילים אחרות $y_i \in S_i$ היא תגובה מיטבית של שחקן i כנגד x_{-i} אם ורק אם

$$u_i(y_i, x_{-i}) = \underset{z_i \in S_i}{\text{Max}} u_i(z_i, x_{-i})$$

- ▶ ראינו בשיעור הקודם שיכולות להיות מספר תגובות מיטביות עבור x_{-i} נתון (לדוגמה: אם $u_i(z_i, x_{-i}) = 0$ לכל $z_i \in S_i$).
- ▶ נסמן $BR_i(x_{-i}) = y_i$.
- הסימון BR הוא עבור best response, תגובה מיטבית.
- ▶ הערה חשובה: באופן כללי BR_i אינה פונקציה (כיוון שהיא יכולה לקבל מספר ערכים).

משחק השותפות

הגדרת המשחק

- ▶ שתי שותפות מקימות סטרט-אפ טכנולוגי בהסכמה שהן מתחלקות שווה בשווה ברווחים.
- ▶ כל שותפה מחליטה על רמת המאמץ שלה בעבודה (רמת המאמץ תלויה לדוגמה במספר שעות העבודה השבועיות).
- ▶ השחקניות: P_1, P_2 .
- ▶ האסטרטגיות: נרמל את רמת המאמץ למספר ממשי בין 0 ל 4, כלומר $s_i \in [0, 4]$. נשים לב שבמשחק זה יש אינסוף אסטרטגיות!
- ▶ תוצאות: הרווח החודשי של החברה (באלפי שקלים) הוא $P(s_1, s_2) = 4(s_1 + s_2 + bs_1s_2)$, כאשר $0 \leq b \leq \frac{1}{4}$ הוא קבוע המייצג את ה"סינרגיה" של עבודתן המשותפת של השותפות.

משחק השותפות

הגדרת המשחק - המשך

▶ פונקציית התועלת של כל אחת מהשותפות צריכה לשקף את העובדה שרמת מאמץ גבוהה עולה במשאבים אחרים (זמן עם המשפחה, בריאות וכו').

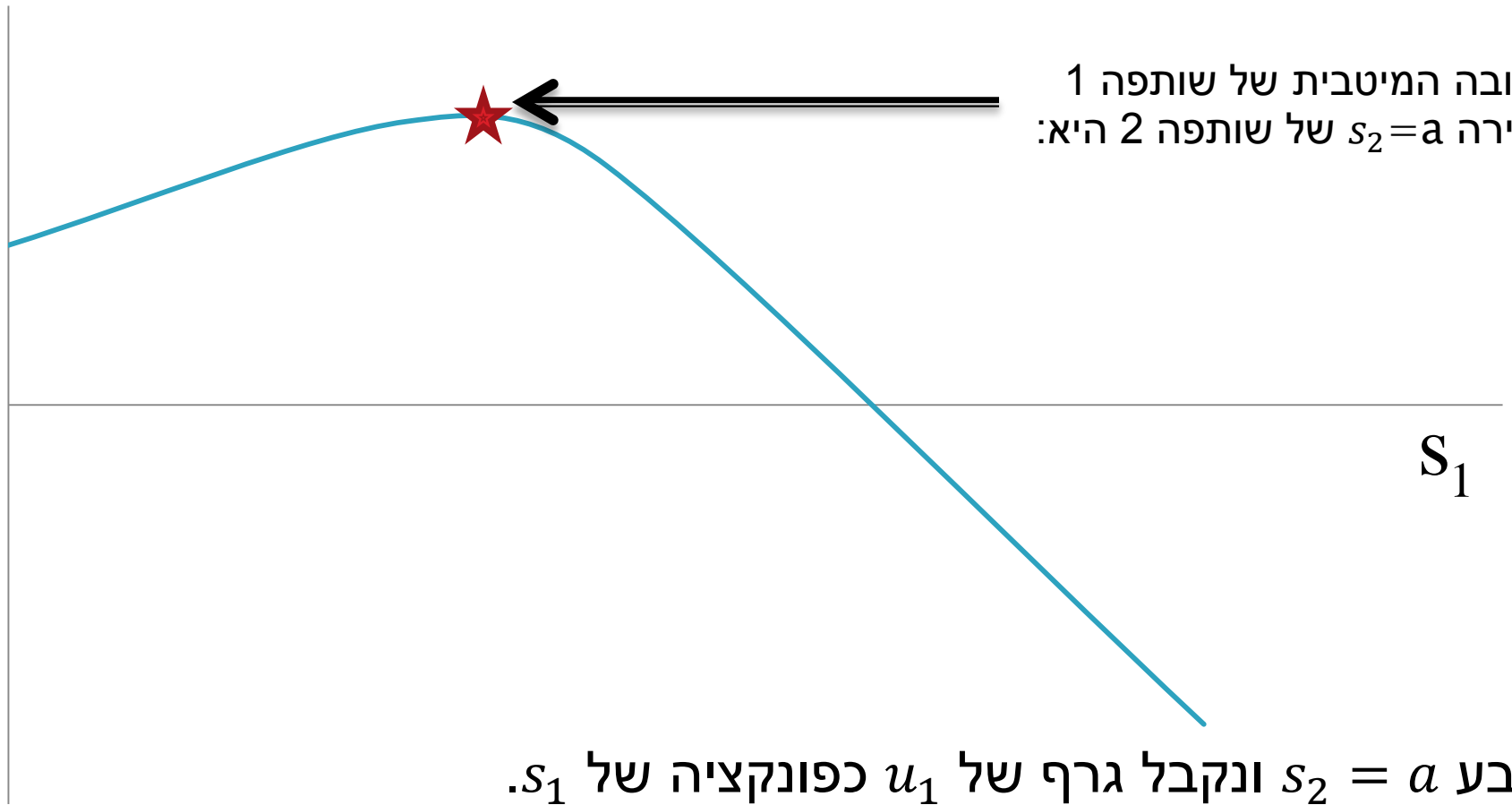
$$\begin{aligned}u_i(s_1, s_2) &= \frac{1}{2} P(s_1, s_2) - s_i^2 \\ &= 2(s_1 + s_2 + bs_1s_2) - s_i^2\end{aligned}$$

משחק השותפות

איך נראית פונקציית התועלת?

$u_1(s_1, a)$

התגובה המיטבית של שותפה 1
לבחירה $s_2 = a$ של שותפה 2 היא:



משחק השותפות

חישוב תגובה מיטבית

$$BR_1(s_2) = \underset{s_1 \in [0,4]}{\text{Max}} \left[2(s_1 + s_2 + bs_1s_2) - s_1^2 \right]$$

▶ ע"מ למצוא מקסימום של פונקציה, ניתן לחשב נקודות קיצון בעזרת אינפי (למצוא התאפסות נגזרות ולבדוק את נקודות השפה).

▶ נשווה את הנגזרת לאפס:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s_1}(s_1, s_2) = 2 + 2bs_2 - 2s_1 = 0$$

▶ כיוון ש $0 \leq b \leq \frac{1}{4}$ מתקיים כי $1 \leq 1 + bs_2 \leq 2$, בתחום הרלוונטי

▶ במקרה זה אין צורך לבדוק את נקודות השפה, כיוון שמדובר בפרבולה בוכה

▶ ולכן סה"כ $BR_1(s_2) = 1 + bs_2$

דוגמאות לחישוב מקסימום

עבור פונקצית התועלת: $u_1(s_1, s_2) = f(s_2)s_1^2 + g(s_2)s_1 + h(s_2)$ כאשר $s_1 \in [a, b]$

- כאשר $f(s_2) > 0$ המקסימום מתקבל באחד הקצוות $s_1 = a, b$
- כאשר $f(s_2) < 0$ המקסימום מתקבל בקיצון $s_1 = -\frac{g(s_2)}{2f(s_2)}$ או באחד הקצוות אם הקיצון מחוץ לתחום $[a, b]$.
- כאשר $f(s_2) = 0$ מדובר בפונקציה לינארית:
 - אם $g(s_2) > 0$ המקסימום מתקבל בקצה הימני $s_1 = b$
 - אם $g(s_2) < 0$ המקסימום מתקבל בקצה השמאלי $s_1 = a$
 - אם $g(s_2) = 0$ זוהי פונקציה קבועה, ולכן המקסימום מתקבל בכל נקודה בקטע $[a, b]$

משחק השותפות

חישוב תגובה מיטבית - המשך

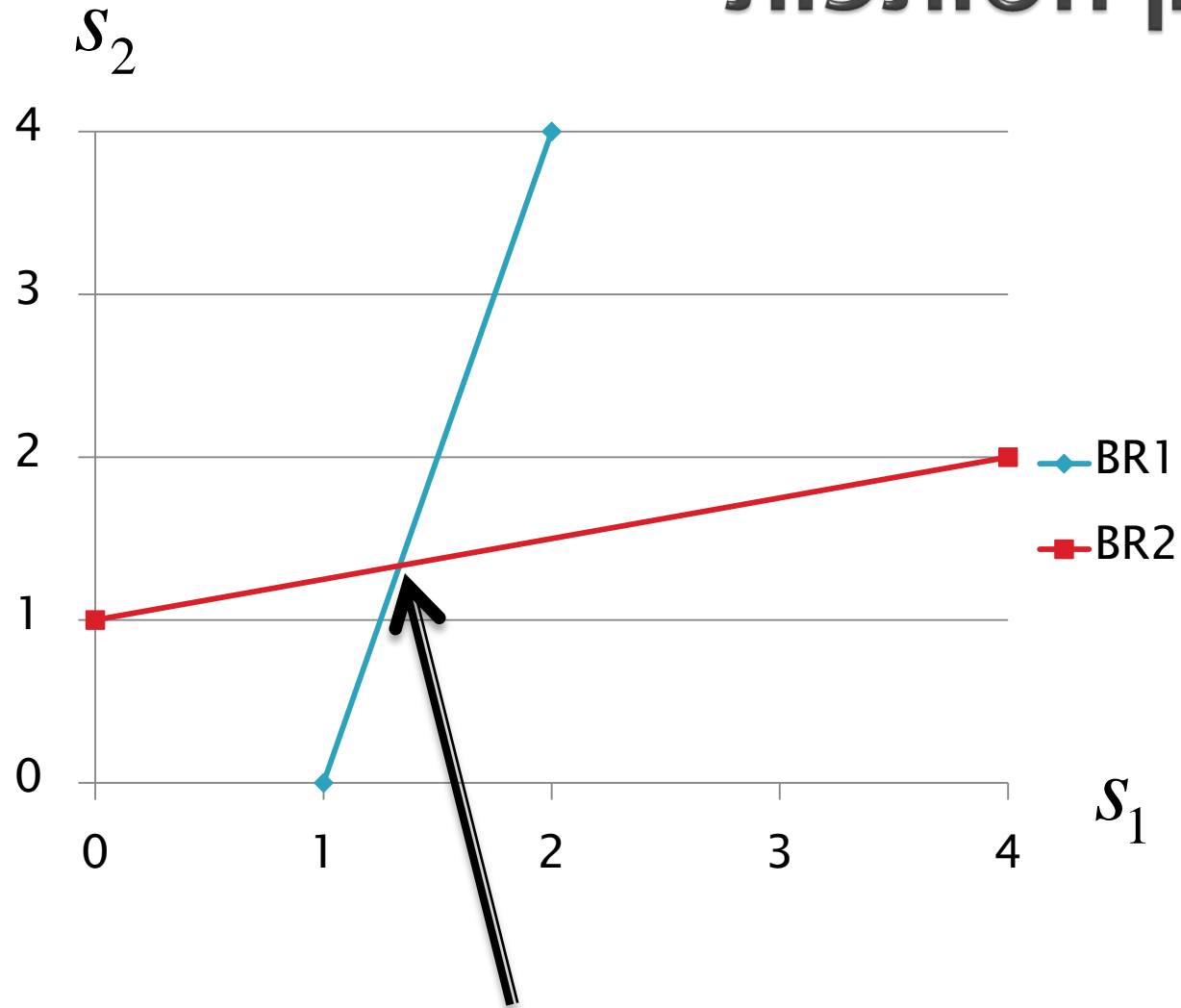
▶ אם כך קיבלנו ש

$$BR_1(s_2) = 1 + bs_2$$

$$BR_2(s_1) = 1 + bs_1$$

▶ לדוגמה עבור $b = \frac{1}{4}$ נקבל:

משחק השותפות



נקודת שיווי משקל נאש

משחק השותפות

מציאת נקודת שיווי משקל נאש

- ▶ נקודת שיווי המשקל היחידה במשחק היא בנקודת החיתוך של שני הגרפים $BR_1(s_2), BR_2(s_1)$.
- ▶ ע"מ למצוא את נקודת החיתוך יש לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} s_1 = BR_1(s_2) = 1 + bs_2 \\ s_2 = BR_2(s_1) = 1 + bs_1 \end{cases}$$

- ▶ לאחר חישוב נקבל

$$s_1 = s_2 = \frac{1}{1-b}$$

משחק השותפות

מציאת נקודת שיווי משקל נאש

▶ כלומר וקטור האסטרטגיות

$$\left(\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-b} \right)$$

הוא נקודת שיווי משקל נאש.

▶ לדוגמה עבור $b = \frac{1}{4}$ נקבל ששיווי משקל נאש הוא

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

משחק השותפות

האם נקודת נאש היא "טובה"?

▶ נחשב עבור $b = \frac{1}{4}$:

▶ הרווח בש"ח עבור כל שותפה בנקודת נאש הוא בערך 6.222 אלפי ש"ח, כאשר התועלת של כל השותפה היא $4.444 = \frac{40}{9}$.

▶ אם כל שותפה עובדת ברמת מאמץ מקסימלית 4, אזי הרווח של כל שותפה הוא 24 אלף ש"ח, והתועלת של כל שותפה היא 8.

▶ אם כך שיווי המשקל במשחק זה לא מביא לתוצאה טובה עבור השותפות.

משחק השותפות

מדוע נקודת נאש אינה "טובה"?

- ▶ כל שותפה היא אנוכית, ודואגת רק לתועלת שלה, ולא לרווח הכללי של החברה (או לתועלת שותפתה).
- ▶ לדוגמה: כאשר שותפה 2 עובדת במאמץ מירבי של 4, משתלם לשותפה 1 לעבוד במאמץ 2 ולא 4, כדי להגיע לתועלת המירבית עבורה (12).
- ▶ יש דמיון בין משחק זה לדילמת האסיר, אנוכיות (רציונליות) השותפות מביאה בסופו של דבר לתוצאות לא רצויות.
- ▶ נשים לב שלסינרגיה אין השפעה על אי-יעילות נקודת שיווי המשקל.
- ▶ כדאי לפתור בעיה זו ע"י חוזה בין השותפות, כיוון שתקשורת בין השותפות לא תעזור.

משחק על ריבוע היחידה

▶ השחקנים: P_1, P_2 .

▶ האסטרטגיות $s_i \in [0,1]$.

▶ פונקציות התשלומים הן:

$$u_1(x, y) = 3xy - 2x - 2y + 2$$

$$u_2(x, y) = -4xy + 3x + y$$

▶ נחשב את $BR_1(y)$. אנחנו רואים שכאשר $y \neq \frac{2}{3}$, אין

לפונקציה נקודות קיצון בקטע $(0,1)$ -- עבור כל בחירה של y הפונקציה מתארת קו ישר.

▶ כאשר $y = \frac{2}{3}$ הפונקציה $u_1(x, \frac{2}{3})$ קבועה. לכן כל תגובה x של שחקן 1 היא תגובה מיטבית ל $y = \frac{2}{3}$, כלומר:

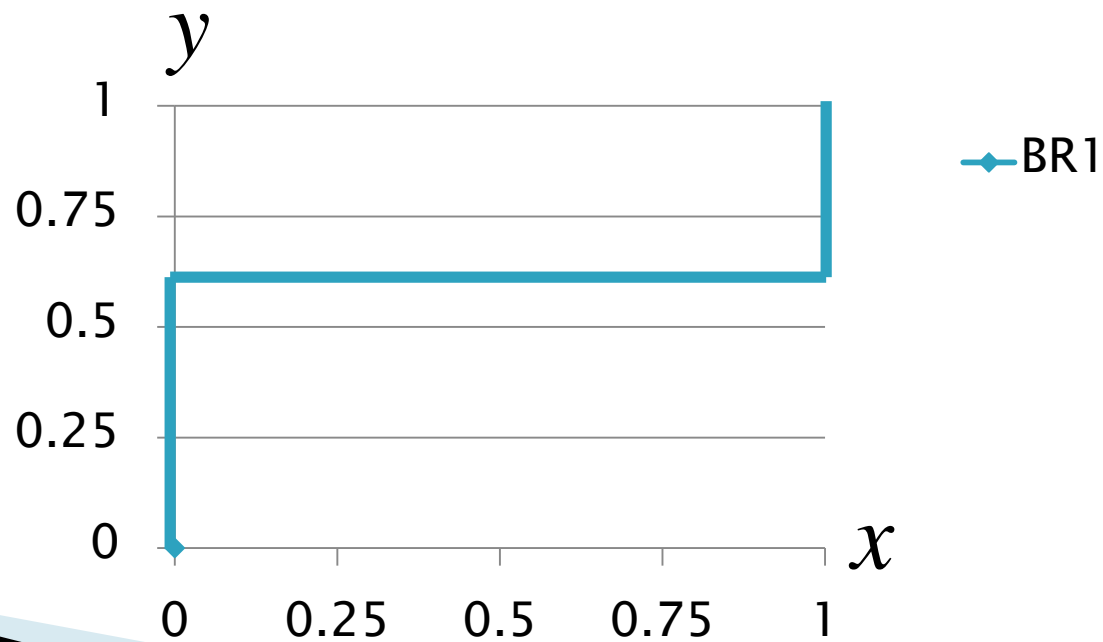
$$BR_1\left(\frac{2}{3}\right) = [0, 1]$$

▶ לגבי ערכים $y \neq \frac{2}{3}$ צריך לבדוק את נקודות השפה כדי לקבוע מהי התגובה הטובה ביותר:

◦ עבור $y \in [0, \frac{2}{3})$ השיפוע שלילי ולכן התגובה המיטבית היא $x = 0$.

◦ עבור $y \in (\frac{2}{3}, 1]$ השיפוע הוא חיובי, ולכן התגובה המיטבית היא $x = 1$.

$$BR_1(y) = \begin{cases} 0 & y \in [0, \frac{2}{3}) \\ [0, 1] & y = \frac{2}{3} \\ 1 & y \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$



בצורה דומה מחשבים את $BR_2(x)$ ומקבלים: ▶

$$BR_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ [0,1] & x = \frac{1}{4} \\ 0 & x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

