

מבחן בקורס מבנים אלגבריים להנדסה 83-218

מועד ב', סמסטר קיץ תשע"ז

מרצה: תומר באואר **מתרגלת:** עדי בן צבי **משך המבחן:** שעתיים וחצי
הוראות: יש לענות על 4 שאלות מתוך חמש השאלות הראשונות, ובנוסף יש שאלת בונוס. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס, ונא לא לפתור סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.
חומר עזר: אין, גם לא מחשבון.

שאלה 1. תהי G חבורה.

1. (13 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל $x, y \in G$ מתקיים $o(xy) = o(x)o(y)$.

2. (12 נק') הוכיחו או הפריכו: יהיו $x, y \in G$ המקיימים $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$. אז $xy = yx$.

שאלה 2. תהי G חבורה.

1. (13 נק') הוכיחו שאם G ציקלית ומסדר 8, אז קיימת לה תת-חבורה ציקלית מסדר 4.

2. (12 נק') תנו דוגמה לחבורה מסדר 8 שאין לה תת-חבורה ציקלית מסדר 4, והוכיחו זאת.

שאלה 3. יהי F שדה. נסמן ב- $SL_n(F)$ את אוסף המטריצות בגודל $n \times n$ מעל F עם דטרמיננטה השווה 1.

1. (15 נק') הוכיחו כי $SL_n(F) \triangleleft GL_n(F)$. יש להוכיח שהיא תת-חבורה ושהיא נורמלית.

2. (10 נק') חשבו את האינדקס $[GL_3(\mathbb{F}_7) : SL_3(\mathbb{F}_7)]$. רמז: משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 4. תהי G חבורה. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

1. (9 נק') אם G מסדר זוגי, וישנם $g, h \in G$ המקיימים $g^3 = h^3$, אז $g = h$.

2. (8 נק') אם $H \triangleleft G$ וחבורת המנה G/H ציקלית, אז G ציקלית.

3. (8 נק') החבורה החיבורית של כל שדה היא ציקלית.

שאלה 5. נסמן קבוצת מטריצות

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_5 \right\} \subseteq M_2(\mathbb{F}_5)$$

1. (15 נק') הוכיחו כי R הוא חוג חילופי (עם פעולות חיבור וכפל מטריצות).

2. (10 נק') הוכיחו ש- R אינו איזומורפי לשדה \mathbb{F}_{25} . רמז: למה מספיק להראות כי R אינו שדה?

שאלת בונוס (7 נק') עבור החוג R משאלה 5, מצאו הומומורפיזם של חוגים $\varphi: R \rightarrow \mathbb{F}_{25}$ שאינו טריוויאלי ומצאו את $\text{Ker } \varphi$. רמז: קודם מצאו את $\text{Ker } \varphi$ ורק אז הגדירו את φ . גם אם לא בחרתם את שאלה 5, אפשר להניח את נכונותה.

בהצלחה!