

83-116 מתמטיקה בדידה – תרגיל 7 - פתרון

לציין בפתרון המוגש: שם מלא, ת.ז ויום של התרגול אליו אתם באים

מקדמי המולטינום

תרגיל 1 כמה אפשרויות יש לחלוקת 16 קבוצות כדורגל שונות ל-4 בתים שווים בגודלם? $\binom{16}{4,4,4,4}$

תרגיל 2 מה המקדם של $x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^5$ בפיתוח של $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{11}$? $\binom{11}{2,3,1,5}$

תרגיל 3 הוכח: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$ בדרך אלגברית וקומבינטורית

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k, n-k} \text{ :אלגברית}$$

קומבינטורית: לבחור k אברים מתוך n (צד שמאל) זה כמו לבחור k אברים לקבוצה אחת (קבוצת "הנבחרים") ו- $n-k$ אברים לקבוצה שניה (קבוצת ה"לא-נבחרים" או "פח הזבל")

תרגיל 4 בליגת העל יש 26 מחזורים. לקבוצה מסוימת היו בעונה אחת 13 ניצחונות 7 הפסדים ו6 תיקו. כמה אפשרויות יש לעונה? $\binom{26}{13,7,6}$

תרגיל 5 מטילים 5 קוביות שונות. כמה תוצאות שונות יש כך שמספר מסוים (כלשהו) יופיע 3 פעמים ו2 מספרים אחרים (שונים) יופיעו כל אחד פעם אחת?

את הקוביות נחלק ל3 קבוצות לפי המס' שיצא להם: קבוצה א' תכיל 3 קוביות קבוצה ב' תכיל קוביה אחת וקבוצה ג' קוביה אחת. מס' אפשרויות: $\binom{5}{1,1,3}$

את התוצאות (1-6) נחלק ל3 קבוצות: קבוצה 1 תכיל מספר אחד שיופיע 3 פעמים, קבוצה 2 תכיל 2 מספרים שיופיעו כל אחד פעם אחת וקבוצה 3 תכיל את כל שאר המספרים שלא יופיעו כלל (יש 3 כאלו). מס' אפשרויות: $\binom{6}{1,2,3}$

$$\text{סה"כ: } \binom{5}{1,1,3} \binom{6}{1,2,3}$$

הכלה והדחה

תרגיל 6 בכמה דרכים ניתן לבחור חמש קלפים מחבילת קלפים (יש 52 קלפים שונים בחבילה) כך שיש לפחות קלף אחד מכל צורה (תלתן, מעוין, לב ועלה)

נסמן ב A את בחירה של 5 קלפים מתוך החפיסה.
נסמן ב A_1 את המקרה שבו לא בחרנו תלתן, A_2 שלא נבחר יהלום, A_3 שלא נבחר לב ו A_4 שלא נבחר לב.

ולכן יש לחשב את $|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

נשים לב שלכל i נקבל ש $|A_i| = \binom{39}{5}$ ולכל $i \neq j$ נקבל ש $|A_i \cap A_j| = \binom{26}{5}$

וכו...

ולכן התשובה

$$\binom{52}{5} - 4\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{26}{5} - \binom{4}{3}\binom{13}{5}$$

תרגיל 7

א. כמה מספרים בין 1-3000 אינם מתחלקים באחד מהמספרים 2,3,5?

A_1 - מספרים, שמתחלקים ב-3

A_2 - מספרים, שמתחלקים ב-4

A_3 - מספרים, שמתחלקים ב-5

$$3000 - (1000 + 750 + 600 - 250 - 200 - 150 + 50) = 1200$$

ב. כמה מספרים בין 1-1000 מתחלקים בדיוק באחד מהמספרים 4,5?

$A_4 = \{ \text{מספרים 1-3000 המתחלקים ב-4} \}$

$A_5 = \{ \text{מספרים 1-3000 המתחלקים ב-5} \}$

רוצים את $|A_4 \Delta A_5| = |A_4 \cup A_5| - |A_4 \cap A_5| = |A_4| + |A_5| - 2|A_4 \cap A_5|$

$$750 + 600 - 2 * 150 = 1050$$

תרגיל 8 כמה פתרונות שלמים יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$

כאשר $1 \leq x_i \leq 7$ לכל $1 \leq i \leq 4$?

זה כמו לפתור $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ כאשר $x_i \leq 6$.

נסמן ב A_i את אוסף הפתרונות כך ש $x_i \geq 7$

$$|A_i| = \binom{7}{4}, \quad |A_i \cap A_j| = |\emptyset| = 0, \dots$$

$$\text{ולכן סה"כ: } \binom{14}{11} - 4 * \binom{7}{4}$$

תרגיל 9 לכמה פונקציות חח"ע $f: \{1, \dots, 100\} \rightarrow \{1, \dots, 100\}$ אין נקודת שבת?

הבהרה: נקודת שבת היא איבר " $100, \dots, 1$ " כך ש $f(x) = x$

נגדיר A_i ($1 \leq i \leq 100$) את קבוצת הפונקציות החח"ע כך ש $f(i) = i$. מתקיים כי $|A_i| = 99!$, חיתוך כל k קבוצות שווה ל $(100 - k)!$. סך כל הפונקציות הוא $100!$, הפתרון $(100 - k)!$ $\sum_{k=0}^{100} (-1)^k \binom{100}{k} (100 - k)!$

בהצלחה!