

מרחבים וקטוריים:

מ"ו-הגדרה: קבוצה V

עם פעולה $+$ (חיבור וקטורי) המוגדרת על V ופעולה $\cdot_{\mathbb{F}V} : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ (כפל סקלרי) נקראת מרחב וקטורי

מעל השדה \mathbb{F} אם מתקיימות התכונות הבאות:

- 1 מוגדרות החיבור. לכל $u, v \in V$ מתקיים $u +_V v \in V$,
 - 2 קיבוץ. לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $(u +_V v) +_V w = u +_V (v +_V w)$,
 - 3 חילוף. לכל $u, v \in V$ מתקיים $u +_V v = v +_V u$,
 - 4 איבר נייטרלי. קיים איבר $0_V \in V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $v +_V 0_V = v$,
 - 5 איבר נגדי. לכל $v \in V$ קיים $-v \in V$ כך ש $v +_V (-v) = 0_V$.
- 6 תכונות הכפל הסקלרי:

- א. מוגדרות. לכל $v \in V$ ו $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \cdot_{\mathbb{F}V} v \in V$,
- ב. קיבוץ. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $(\alpha \cdot_{\mathbb{F}} \beta) \cdot_{\mathbb{F}V} v = \alpha \cdot_{\mathbb{F}V} (\beta \cdot_{\mathbb{F}V} v)$,
- ג. כפל יחידה. לכל $v \in V$ מתקיים $1 \cdot_{\mathbb{F}V} v = v$.
- ד. פילוג.

(i) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $u, v \in V$ מתקיים $\alpha \cdot_{\mathbb{F}V} (u +_V v) = \alpha \cdot_{\mathbb{F}V} u + \alpha \cdot_{\mathbb{F}V} v$

(ii) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $(\alpha + \beta) \cdot_{\mathbb{F}V} v = \alpha \cdot_{\mathbb{F}V} v + \beta \cdot_{\mathbb{F}V} v$

אברי הקבוצה V נקראים וקטורים, ואברי השדה \mathbb{F} נקראים סקלרים.

1.2 תרגיל. יהא \mathbb{R}^2 עם פעולת חיבור וקטורים הרגילה. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוצעת הגדרה לכפל

בסקלר. בדוק האם ההצעה אכן נותנת מרחב וקטורי.

א. $\alpha(x, y) := (\alpha x, \alpha y)$

ב. $\alpha(x, y) := (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$

פתרון:

א. לא, כי ד לא מתקיים:

$$(k + h)(x, y) = ((k + h)x, y) = (kx + hx, y) \neq k(x, y) + h(x, y) = (kx, y) + (hx, y) = ((k + h)x, 2y)$$

ב. לא, כי ד לא מתקיים:

$$(h + k)(x, y) = ((h^2 + 2hk + k^2)x, (h^2 + 2hk + k^2)y) \neq h(x, y) + k(x, y) = ((h^2 + k^2)x, (h^2 + k^2)y)$$

מכפלה קרטזית-הגדרה

יהיו B, A קבוצות, אזי המכפלה הקרטזית בין A ל- B היא:
 $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, כלומר כל הוקטורים הדו-מימדיים כך שהקואורדינטה הראשונה מגיעה מהקבוצה הראשונה במכפלה והקואורדינטה השנייה מהקבוצה השנייה במכפלה.

הכללה: יהיו קבוצות A_1, \dots, A_n , אזי המכפלה הקרטזית ביניהן היא:
 $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i \quad \forall i = 1, \dots, n\}$, כלומר כל הוקטורים ה- n -מימדיים כך שהקואורדינטה במקום ה- i מגיעה מהקבוצה במקום ה- i במכפלה.

תכונה: מכפלה קרטזית היא מ"ו כאשר המוכפלים הם מ"ו מעל אותו שדה עם הפעולות:

- סכום וקטורים לפי רכיבים $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) := (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$
- כפל סקלארי – גם לפי רכיבים $\alpha(u, v) := (\alpha u, \alpha v)$

תת מרחב-הגדרה

יהא V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} . נאמר ש W תת-מרחב של V אם:

1. $\emptyset \neq W \subseteq V$
2. הקבוצה W היא מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} ביחס לפעולת החיבור $+$ של V , והכפל הסקלארי \cdot של \mathbb{F} .

2.1 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} , ויהא W תת-מרחב של V . הוכח: $0_W = 0_V$.

פתרון:

$$0_V \underset{V-ב}{=} 0_F \cdot 0_W \underset{W-ב}{=} 0_W$$

ע"ס הוכחת הקריטריון המקוצר בש.ב.

2.9 תרגיל. יהא $V = \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח שכל אחת מהקבוצות הבאות מהווה תת-מרחב של V (ביחס לפעולות של V):

א. המטריצות הסימטריות.

[ב. המטריצות האנטי-סימטריות]

ג. המטריצות האלכסוניות.

ד. המטריצות המשולשיות עליונות.

ה. המטריצות A עם $\text{tr}(A) = 0$.

ו. המטריצות הסקלריות.

ז. מטריצות מהצורה $O \oplus A = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}$ (כאשר $A \in \mathbb{F}^{k \times k}$ כאשר $k < n$).

פתרון:

(כמובן, לבדוק גם שהת"מ איננו ריק)

א. $A, B, k \in F \Rightarrow (A + kB)^t = A^t + kB^t = A + kB$
סימטריות

ב. $A, B, k \in F \Rightarrow (A + kB)^t = A^t + kB^t = -(A + kB)$
אנטי סימטריות

ג.

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \Rightarrow \forall i \neq j \quad a_{ij}, b_{ij} = 0 \quad k \in F \Rightarrow A + kB = (a_{ij} + kb_{ij}) : \forall i \neq j \quad a_{ij} + kb_{ij} = 0$
אלכסוניות
 \Rightarrow אלכסוניות $A + kB$

ד.

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \Rightarrow \forall i > j \quad a_{ij}, b_{ij} = 0 \quad k \in F \Rightarrow A + kB = (a_{ij} + kb_{ij}) : \forall i > j \quad a_{ij} + kb_{ij} = 0$
משולשיות עליונות
 \Rightarrow משולשיות עליונת $A + kB$

ה. $k \in F, A, B \in \mathbb{F}^{n \times n} : \text{tr}(A), \text{tr}(B) = 0 \Rightarrow \text{tr}(A + kB) = \text{tr}(A) + k \cdot \text{tr}(B) = 0$

ו.

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \Rightarrow \begin{cases} \forall i \neq j & a_{ij}, b_{ij} = 0 \\ a_{ii} = \alpha, b_{ii} = \beta & \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \quad \alpha, \beta, k \in F \Rightarrow$
סקלריות

$A + kB = (a_{ij} + kb_{ij}) : \begin{cases} \forall i \neq j & a_{ij} + kb_{ij} = 0 \\ a_{ii} + kb_{ii} = \alpha + k\beta & \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \Rightarrow$ סקלריות $A + kB$

ז. תהיינה:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in \mathbb{F}^{k \times k}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in \mathbb{F}^{m \times m}, \quad k, m < n$

אזי:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A + \alpha B \end{pmatrix}:$$

$$A + \alpha B \in F^{(\max(k,m)) \times (\max(k,m))} \quad \wedge \quad \max(k,m) < n$$

2.10 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ונגדיר $V_A := \{B \in \mathbb{F}^{n \times n} : BA = AB\}$.

א. הוכח ש V_A תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n \times n}$.

ב. הוכח ש V_A סגור גם לכפל מטריצות.

פתרון:

א.

$$B, C \in V_A \Rightarrow (B + kC)A = BA + kCA = AB + kAC = AB + AkC = A(B + kC) \Rightarrow B + kC \in V_A$$

$$B, C \in V_A \Rightarrow (BC)A = B(CA) = B(AC) = (BA)C = (AB)C = A(BC) \Rightarrow BC \in V_A \quad \text{ב.}$$

3.3 תרגיל. יהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים. הוכח: כל תת-מרחב של V המוכל ב UUW מוכל כולו ב U ו/או

W .

הוכחה: נניח בשלילה ש V איננו מוכל באחד מת"מ אלו, אזי

$$\exists u \in V \setminus W \wedge \exists w \in V \setminus U (\Rightarrow u \in U \wedge w \in W)$$

נתבונן ב- $u + w \notin U, W$ (אחרת $u = u + w - w$ יהיה ב- W וכן"ל ל- w ב- U) ולכן $u + w \notin V'$

בסתירה לכך ש- $u, w \in V'$ ו- V' מ"ו.

3.4 תרגיל. יהי $V = \mathbb{F}^{n \times n}$. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונים שני תת-מרחבים U, W של V . עבור כל

אחד מהם, בצע את סדרת הבדיקות הבאה:

• תאר את $U \cap W$,

• הוכח ש $U \subseteq W$ או $W \subseteq U$; **ואם לא** - הראה ש UUW אינו מ"ו ע"י שתיקה $u, w \in UUW$ כך ש $u \notin W$,

$w \in U$, ותראה (ישירות) ש $u + w \notin UUW$.

א. U - המטריצות הסימטריות; W - המטריצות האלכסוניות.

ד. U - המטריצות הסקלריות (כלומר מהצורה αI עבור $\alpha \in F$); W - מטריצות מהצורה $O \oplus A = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}$

(A מטריצה $k \times k$ כאשר $k < n$).

פתרון:

$$U \cap W = \left\{ A = (a_{ij}) \in F^{n \times n} : A = A^t \wedge \forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \right\} \quad \text{א.}$$

$$A = (a_{ij}) \in W \Rightarrow \forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \Rightarrow \forall i \neq j \quad a_{ij} = a_{ji} = 0 \Rightarrow A \in U$$

ולכן $W \subseteq U$

$$U \cap W = \left\{ A \in F^{n \times n} : \exists \alpha \in F : \begin{cases} \forall i \neq j & a_{ij} = 0 \\ \forall i = 1, \dots, n & a_{ii} = \alpha \end{cases} \wedge \exists A' \in F^{k \times k} : A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \right\} = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in U \subseteq U \cup W, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in W \subseteq U \cup W. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \notin U, W \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \notin U \cup W$$

ולכן האיחוד איננו ת"מ.

סכום תתי מרחבים-הגדרה

יהא V מרחב וקטורי, ויהיו U, W תת-מרחבים של V . הסכום $U+W$ מוגדר ע"י:

$$U+W = \{u+w : u \in U, w \in W\}$$

אם $U \cap W = \{0\}$, נאמר שהסכום $U+W$ הוא ישר (ונכתוב $U \oplus W$).

תרגילים:

4.5 תרגיל. יהיו

$$U = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 = a_2 = \dots = a_n\}; V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\}$$

[א. הוכח ש U, V תת-מרחבים של F^n]

ב. הוכח: $F^n = U \oplus V$.

ג. עבור מטריצה $A \in F^{n \times n}$ נגדיר $\Delta A := (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \in F^n$. יהא U תת-מרחב של F^n , ונגדיר

$$U_\Delta := \{A \in F^{n \times n} : \Delta A \in U\}$$

ד. עבור המרחבים U, V הנ"ל: האם $U_\Delta \oplus V_\Delta = F^{n \times n}$?

פתרון:

א. טריוויאלי.

ב. נחפש זוג וקטורים כללי מ- V ומ- U אשר יבטאו וקטור כללי מ- F^n . כלומר:

$$\forall v = (v_1 \dots v_n) \quad (v_1 \dots v_n) = (k, \dots, k) + (v_1 - k \dots v_n - k) : \sum (v_i - k) = \sum v_i - nk = 0 \Rightarrow$$

$$k = \frac{\sum v_i}{n}$$

↓

ממוצע הקואורדינטות

ולכן:

$$\forall v = (v_1 \dots v_n)$$

$$(v_1 \dots v_n) = \left(\frac{\sum v_i}{n}, \dots, \frac{\sum v_i}{n} \right) + \left(v_1 - \frac{\sum v_i}{n} \dots v_n - \frac{\sum v_i}{n} \right) : \left(\frac{\sum v_i}{n}, \dots, \frac{\sum v_i}{n} \right) \in U \wedge \left(v_1 - \frac{\sum v_i}{n} \dots v_n - \frac{\sum v_i}{n} \right) \in V$$

לגבי החיתוך:

$$(v_1 \dots v_n) \in V \cap U \Rightarrow nv_1 = 0 \Rightarrow \forall i \quad v_i = 0 \Rightarrow (v_1 \dots v_n) = 0$$

ג.

$$\forall A, B \in U_\Delta \quad \exists (a_{11} \dots a_{nn}), (b_{11} \dots b_{nn}) \in \Delta A$$

אלכסונים של A, B

↓

$$(a_{11} \dots a_{nn}) + k(b_{11} \dots b_{nn}) \in \Delta(A) \Rightarrow A + kB \in U_\Delta$$

אלכסון של $A + kB$

$$0 \neq A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge A \in U_\Delta \cap V_\Delta \quad \text{ד. לא:}$$

4.7 תרגיל. יהא V מרחב כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ויהיו U - הפונקציות הזוגיות (אלו המקיימות $f(-x) = -f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$) ו W - מרחב הפונקציות האיזוגיות (אלו המקיימות $f(-x) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$).

א. הוכח ש V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R}

ב. הוכח ש U, W תת-מרחבים של V

ג. הוכח: $V = U \oplus W$. (באז'ים: כל פונקציה ניתנת להצגה בצורה יחידה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה איזוגית)

פתרון:

א.

$$\forall f, g \in V, k \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (f + kg)(x) = f(x) + kg(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f + kg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f + kg \in V$$

קיום האפס והנגדי נובעים מכך ותכונות הקומוטטיביות (לחיבור), דיסטרובוטיביות ואסוציאטיביות ידועות עבור פונקציות.

ב.

$$f(x) = f(-x), g(x) = g(-x) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R} \quad (f + kg)(x) = f(x) + kg(x) = f(-x) + kg(-x) = (f + kg)(-x)$$

$\Rightarrow U$ ת"מ

$$-f(x) = f(-x), -g(x) = g(-x) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R} \quad -(f + kg)(x) = -f(x) - kg(x) = f(-x) + kg(-x) = (f + kg)(-x)$$

$\Rightarrow U$ ת"מ

ג.

+:

$$\forall g(x) \in V \quad g(x) = \frac{\overbrace{g(x)+g(-x)}^{h(x)} + \overbrace{g(x)-g(-x)}^{f(x)}}{2} \cdot \begin{cases} \frac{h(x)}{2} = \frac{g(x)+g(-x)}{2} = \frac{g(-x)+g(x)}{2} = \frac{h(-x)}{2} \Rightarrow \frac{h}{2} \in U \\ \frac{f(x)}{2} = \frac{g(x)-g(-x)}{2} = \frac{-(g(-x)+g(x))}{2} = \frac{-f(-x)}{2} \Rightarrow \frac{f}{2} \in W \end{cases}$$

$$\cap: g \in U \cap W \Rightarrow \forall x \in R \quad g(x) = g(-x) = -g(x) \Rightarrow 2g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \forall x \in R \Rightarrow g = 0$$

4.10 תרגיל. יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל שדה F . הוכח: $U \times V = (U \times \{0_V\}) \oplus (\{0_U\} \times V)$.

+:

$$\forall (u, v) \in U \times V \quad (u, v) = (u, 0) + (0, v) \in (U \times 0) + (0 \times V)$$

\cap :

$$(u, v) \in (U \times 0) \cap (0 \times V) \Rightarrow (u, v) \in (U \times 0) \wedge (u, v) \in (0 \times V) \Rightarrow \\ u \in U \wedge v \in \{0_V\} \wedge u \in \{0_U\} \wedge v \in V \Rightarrow u = 0_U, v = 0_V$$

ובסה"כ סכום ישר.