המשך נקודות קיצון עם אילוצים

משפט חשוב שנעזר בו כדי להוכיח שקיים מינימום מקסימום הוא משפט ווירש-טראס:

> אם E תחום סגור וחסום ב-$\mathbb{R}^n$, אז הקבוצה היא קומפקטית ולכן מקבלת שם מינימום ומקסימום.

תמיד לפני שנחפש מינ' ומקס' נדאג שאכן מתקיים משפט ווירשטראס.

דוגמה 1

מצאו נקודת קיצון של $f(x,y,z)=-x+2y+2z$ באילוצים $y+2z=1$ ו-$x^2+y^2=2$

פתרון

f תקבל מינימום ומקסימום באילוצים הנ"ל מכיוון שהקבוצה $E=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2=2,y+2z=1\right\}$ היא קבוצה חסומה ב-$\mathbb{R}^3$(בנוסף f תיבה) ולכן לפי משפט ווירשטראס נקבל כי f מקבלת ב-E מינ' ומקס'.

נבנה פונקציית לגרנז'. נסמן:

$$g_1(x,y,z)=y+2z-1$$

$$g_2(x,y,z)=x^2+y^2-2$$

ולכן הפונקציה הדרושה היא

$$L=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2$$

נגזור לפי הפרמטרים x,y,z:

$$L'_x=f'_x+\lambda_1 g'_{1x}+\lambda_2 g'_{2x}=-1+2_2x=0$$

$$L'_y=2+\lambda_1+2\lambda_2 y=0$$

$$L'_z=2+2\lambda_1=0$$

(וגוזרים גם לפי למבדא - נקבל את האילוצים)

קיבלנו שלוש משוואות (נאלץ את מה שאפשר)

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2\lambda_2} \\ y=\dfrac{-(2+\lambda_1)}{2\lambda_2} \\ \lambda_1=-1 \end{cases}$$

נסיק מכך

$$y=\frac{-(2-1)}{2\lambda_2}=\frac{-1}{2\lambda_2}$$

כלומר: $x=\frac{1}{2\lambda_2}$ ו$y=-\frac{1}{2\lambda_2}$. נציב באילוץ(המתאים לg_2)

$$\left(\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\lambda_2}\right)^2=2$$

$$\frac{1}{4\lambda_2^2}+\frac{1}{4\lambda_2^2}=\frac{1}{2\lambda_2^2}=2$$

$$\lambda_2=\pm\frac{1}{2}$$

- עבור $\lambda_2=\frac{1}{2}$ מתקבל $x=1,y=-1$. נציב באילוץ(המתאים לg_1) ונקבל $-1+2z-1=0$ ⇐ $\boxed{z=-1}$ ולכן הנקודה היא $p_1=(1,-1,1)$
- באופן דומה עבור $\lambda_2=-\frac{1}{2}$, נקבל את הנקודה $p_2=(-1,1,0)$

כדי למצוא מינימום ומקסימום, נשתמש בקריטריון סילבסטר

$$L''_{xx}=z\lambda_2$$

$$L''_{xy}=0$$

$$L''_{xz}=0$$

$$L''_{yy}=2\lambda_2$$

נבנה מינורים:

$$\Delta_1=2\lambda_2$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2\lambda_2 & 0\\ 0 & 2\lambda_2\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2\lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

אפשר לראות שהקריטריון לא עוזר כי $\Delta_3 = 0$, ולכן נבנה את הדיפרנציאל מסדר שני d^2L:

$$d^2_{p_1}\left(h_1, h_2, h_3\right) = -\left(h_1^2 + h_2^2\right) < 0$$

ולכן הנקודה היא מקסימום.

נקודות קיצון גלובליות

דרך לפתרון

כאשר מחפשים נקודות קיצון גלובליות לפונקציה f בתחום סגור E אז מחשבים את נקודות הקיצון המקומיות בתוך התחום כרגיל. אם מתקיימים התנאים למשפט ויירש-טראס ייתכן שכם בנקודות השפה מתקבל קיצון ולכן עבור השפה נשתמש בשיטת כופלי לגרנג', ובסוף נשווה בין כל הערכים. הערך הגדול ביותר מקס' גלובלי ובאופן דומה הקטן ביותר מינ' גלובלי.

דוגמה 2

מצאו את המקסימום של הפונקציה $f\left(x,y,z\right) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ בכדור $B = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}$

פתרון

נחפש קודם נקודות קיצון(בלי אילוץ).

$$f'_x = \sqrt{2}, f'_y = \sqrt{2}, f'_z = \sqrt{3}$$

ולכן אין לf נקודות קיצון מקומיות.

הערה אם כן היו נקודות קיצון היינו בודקים האם הן בתוך הכדור!

במקרה שלנו נשאר לבדוק רק את הנקודות קצה - כלומר האילוץ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. נבנה פונקציית לגרנג' מתאימה:

$$L\left(x,y,z,\lambda\right) = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2\right)$$

$$\begin{cases} L'_x = \sqrt{2} + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = \sqrt{2} + 2y\lambda = 0 \\ L'_z = \sqrt{3} + 2z\lambda = 0 \end{cases}$$

קל חלץ את x, y, z. נציב במשוואת האילוץ:

$$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2\lambda}\right)^2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{7}{8}$$

- עבור $\lambda = \sqrt{\frac{7}{8}} \Leftarrow p_1 = \left(-\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{4}{7}}, -\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$
- עבור $\lambda = -\sqrt{\frac{7}{8}} \Leftarrow p_2 = \left(\sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{4}{7}}, \sqrt{\frac{6}{7}}\right)$

נעזר בקריטריון סילבסטר לקבוע מינ/מקס:

$$L''_{xx} = 2\lambda$$

$$L''_{yy} = 2\lambda$$

$$L''_{xy} = 0$$

$$L''_{zz} = 2\lambda$$

$$L''_{zx} = 0$$

- עבור $\lambda = \sqrt{\frac{7}{8}}$:

$$\Delta_1 = L''_{xx} > 0$$

$$\Delta_2 > 0$$

$$\Delta_3 > 0$$

ולכן נקודת מינימום.

- עבור $\lambda = -\sqrt{\frac{7}{8}}$

$$\Delta_1 < 0$$

$$\Delta_2 > 0$$

$$\Delta_3 < 0$$

ולכן מקסימום כי $\Delta_1, \Delta_3 < 0$ ו$\Delta_2 > 0$

ניתן בקלות ע"י הצבה למצוא את ערך הפונקציה:

$$\varphi\left(p_1\right) = -\frac{\sqrt{32}+\sqrt{18}}{\sqrt{7}}$$

$$\varphi\left(p_2\right) = +\frac{\sqrt{32}+\sqrt{18}}{\sqrt{7}}$$

ולכן אלו גם מינ' ומקס גלובלי בהתאמה!

אינטגרציה ב־$\mathbb{R}^n$

מדובר על אינטגרלים מהצורה

$$\int_a^b f\left(y\right)\left(\int_c^d g\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

או

$$\int_a^b f\left(x\right)\left(\int_c^d g\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

מחשבים את האינאגרל הפנימי כאינטגרל רגיל של המשתנה הפנימי(מתייחסים למשתנה החיצוני כקבוע) ולאחר מכן מחשבים את האינטגרל החיצוני.

דוגמה

חשבו את האינטגרלים החוזרים

I $\int_0^2\int_0^1\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

II $\int_0^1\int_0^2\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

פתרון

עבור I נרשום את האינטגרל באופן הבא:

$$\int_0^2\left(\int_0^1\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^2\left(\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x=0}^{x=1}\right)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^2\left(\frac{1}{3}+y^2\right)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

עבור II:

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\left[yx^2+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2+\frac{8}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}+\frac{8}{3}x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{10}{3}$$

רואים ששני האינטגרלים יוצאים שווים. מקרה זה הוא מקרה פרטי של החלפת סדר אינטגרציה.

הערה

כאשר התחום הוא מלבני והגבולות קבועים ניתן להחליף סדר אינטרגציה.

דוגמה 2

חשבו את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} \left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}s$ כאשר

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{c} x(t)=a\cos t \quad y(t)=a\sin t \quad z=b\cdot t \\ 0\le t\le 2\pi \end{array} \right\}$$