אלגברה לינארית 2 (88113) – פתרון בחינה (מועד ב')

פרופ' רון עדין

הפתרונות כאן מנוסחים בקיצור נמרץ.

בהצלחה!

1. יהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ אופרטור לינארי המייצג שיקוף ביחס לישר $y=x$:

$T(x,y)=(y,x) \qquad (\forall x,y\in\mathbb{R})$

א. רשמו את המטריצה $[T]_E$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{R}^2$.

$[T]_E=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

ב. מצאו בסיס סדור B של $\mathbb{R}^2$ שעבורו $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$.

הוקטור הראשון ב-B צריך לקיים $T(v_1)=v_1$. לכן, למשל: $B=((1,1),(1,0))$.

ג. האם יש בסיס סדור C של $\mathbb{R}^2$ שעבורו $[T]_C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$? נמקו.

לא, כי הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת לא תלויה בבחירת הבסיס, והיא שונה עבור $[T]_E$ ועבור $[T]_C$ המוצעת. כנ"ל לגבי עקבה.

2.

א. הגדירו: ערך עצמי, בלוק ז'ורדן.

ב. תהי $A\in\mathbb{C}^{10\times10}$ בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda\in\mathbb{C}$. נתון:

$\operatorname{rank}(A-\lambda I)=4,\quad \operatorname{rank}(A-\lambda I)^2=3$

מצאו את גודלי בלוקי ז'ורדן של A. בדקו את תשובתכם.

$J_5(\lambda)+J_1(\lambda)+J_1(\lambda)+J_1(\lambda)+J_1(\lambda)+J_1(\lambda)$

ג. עבור המטריצה הנ"ל, חשבו את $\operatorname{rank}(A-\lambda I)^k$ לכל $k\ge 3$.

$\operatorname{rank}(A-\lambda I)^3=2,\quad \operatorname{rank}(A-\lambda I)^4=1,\quad \operatorname{rank}(A-\lambda I)^k=0\quad(k\ge5)$

3.

א. הגדירו: קבוצה אורתונורמלית, אופרטור אוניטרי.

ב. יהי: V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $v,w\in V$ כך ש-$\|v\|=\|w\|$. הוכיחו שקיים אופרטור אוניטרי $T:V\to V$ כך ש-$T(v)=w$.

אם $\|v\|=\|w\|=0$ נוכל לקחת אופרטור אוניטרי T כלשהו. אחרת, נוכל להניח (אחרי נירמול): $\|v\|=\|w\|=1$. נשלים את v לבא"נ סדור E של V, ואת w לבא"נ סדור F של V. קיים אופרטור אוניטרי המעביר את E ל-F, ובפרט את v ל-w.

ג. יהיו: $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלרית הרגילה, $v=(1,0)$, $w=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. מצאו אופרטור אוניטרי $T:V\to V$ כך ש- $T(v)=w$; הציגו אותו בבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$.

$$[T]_E=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

.4

א. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות מתחלפות: $AB=BA$. הוכיחו: אם A מטריצה אלכסונית עם אברי אלכסון שונים זה מזה, אז B אלכסונית.

A אלכסונית, ולכן איבר (i,j) של AB הוא $a_{ii}b_{ij}$, ושל BA הוא $b_{ij}a_{jj}$. עבור $i\neq j$ נתון כי $a_{ii}\neq a_{jj}$, ולכן $a_{ii}b_{ij}=b_{ij}a_{jj}$ גורר $b_{ij}=0$.

ב. הוכיחו: אם $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות מתחלפות כך שהפולינום האופייני של A מתפרק לגורמים ליניאריים שונים, אז B ניתנת ללכסון. ניתן להשתמש במסקנת הסעיף הקודם גם אם לא הוכחתם אותה.

מהנתון נובע ש- A ניתנת ללכסון, כלומר קיימת P הפיכה כך ש- $A':=P^{-1}AP$ אלכסונית (עם אברי אלכסון שונים). $B':=P^{-1}BP$ מקיימת $A'B'=B'A'$ (כי $AB=BA$), ולכן לפי סעיף א' B' אלכסונית.

ג. תנו דוגמה של $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתחלפות כך שהפולינום <u>המינימלי</u> של A מתפרק לגורמים ליניאריים שונים אבל B לא ניתנת ללכסון.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

.5

א. הגדירו: מכפלה פנימית (מעל $\mathbb{R}$ ומעל $\mathbb{C}$).

ב. עבור אילו ערכי $a,b\in\mathbb{R}$ מהווה הפונקציה הבאה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle := x_1x_2+5x_1y_2+ay_1x_2+by_1y_2$$

$a=5$, $b>25$.

ג. בחרו ערכים מותרים (לפי הסעיף הקודם) עבור $a,b\in\mathbb{R}$, ומצאו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$ ביחס למכפלה הפנימית הנ"ל.

עבור $a=5$, $b=26$ אפשר לקחת למשל $E=((1,0),(-5,1))$.