מופשטת 1 תרגיל בית 11

1. עבור $H \le G$ נגדיר את המנרמל של H ב G להיות $N_G(H) = \{x \in G | xH = Hx\}$.
הוכיחו:
א. $N_G(H) \le G$, ו $(N_G(H) = G \Longleftrightarrow H \trianglelefteq G)$.
ב. $H \trianglelefteq N_G(H)$.
ג. אם $H \trianglelefteq K \subseteq G$ אז $K \subseteq N_G(H)$.
ד. נניח $K \subseteq H \le G$ ו $K \trianglelefteq G$, אזי $N_{G/K}(H/K) = N_G(H)/K$.

2. הוכיחו:
א. לכל חבורת־ p G, ו $H < G$, $H < N_G(H)$ (כלומר, H תת חבורה אמיתית של המנרמל שלה).
רמז: אינדוקציה על הסדר של G.
ב. הסיקו מהסעיף הקודם שכל תת חבורה מאינדקס p של חבורת־ p היא נורמלית.

3. נתבונן בS_6 ובתת חבורה $H = \{\sigma \in S_6 | \sigma(2) = 2, \sigma(4) = 4, \sigma(6) = 6\}$.
הוכחתם שH אכן תת חבורה. הראו כי ב$N_{S_6}(H)$ יש שתי תת חבורות K, L כך ששתיהן איזומורפיות לS_3, ו $L \cap K = \{e\}$.

4. רשמו את שוויון המחלקות עבור החבורות S_5, S_4, D_4. כלומר, הביעו את הסדר של כל אחת מהן באמצעות סכום הגדלים של מחלקות הצמידות. שימו לב כמה איברים יש במרכז.

5. א. תהי $H \le G$. וP תת חבורת p־ סילו של H, הוכיחו שקיימת P' תת חבורת p־ סילו של G כך ש $P = P' \cap H$.
ב.תהי $H \trianglelefteq G$, וP תת חבורת p־ סילו של G, הוכיחו ש $P \cap H$ היא תת חבורת p־ סילו של H.

6. נתבונן בחבורת הסימטריה S_p עבור מספר ראשוני p.
א. כמה איברים מסדר p יש בחבורה?
ב. חשבו בעזרת סעיף א' את מספר תת החבורות מסדר p ב S_p.
ג. העזרו בסעיף ב' ובמשפט סילו 3 כדי להוכיח: לכל ראשוני p,

$$(p-1)! \equiv (p-1) \mod p$$

.

7. א. תהי G חבורה מסדר pq כאשר $q < p$ ראשוניים ו $p \neq 1 \mod q$, הוכיחו כי G ציקלית.

הדרכה: חשבו את n_p ו n_q, והסיקו כמה איברים מכל סדר אפשרי קיימים בחבורה.
ב. תהי G חבורה מסדר 55 כך שיש בה יותר מ4 איברים מסדר 5, אזי G אינה אבלית.

8. תהי G חבורה מסדר 12 ויהיו n_2 ו n_3 מספר חבורות ה־2 סילו וה3־ סילו בהתאמה.
א. מהם ערכי n_2 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שכל ערכי n_2 המדוברים אכן אפשריים)
ב. מהם ערכי n_3 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שכל ערכי n_3 המדוברים אכן אפשריים)
ג. האם יתכן ש $n_2 = 3$ ו $n_3 = 4$?