אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 7

10 בדצמבר 2019

הגדרה: פונקציה f היא רציפה ליפשיץ בקטע $[a,b]$ אם היא רציפה וקיים קבוע $M>0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<M|x-y|$. נסמן $f\in Lip[a,b]$.

הגדרה: פונקציה f היא רציפה בהחלט בקטע $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם הקטעים $[a_k,b_k]\subset[a,b]$ זרים בזוגות עבור $1\le k\le n$, ומקיימים $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, אז $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$. נסמן $f\in AC[a,b]$.

הערה: כל פונקציה רציפה בהחלט בקטע, בפרט רציפה במידה שווה בקטע.

הגדרה: תהי f פונקציה, ותהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$. נסמן $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. נגדיר את ההשתנות של f ב־P לפי $V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$. כמו כן נגדיר את ההשתנות של f בקטע $[a,b]$ לפי $T_a^b(f)=\sup_P V(f,P)$. נאמר ש־f היא בעלת השתנות חסומה בקטע $[a,b]$ אם $T_a^b(f)<\infty$. נסמן $f\in BV[a,b]$.

משפט: פונקציה גזירה ברציפות היא רציפה ליפשיץ. פונקציה רציפה ליפשיץ היא רציפה בהחלט. פונקציה רציפה בהחלט היא בעלת השתנות חסומה. כלומר

$$C^1[a,b]\subset Lip[a,b]\subset AC[a,b]\subset BV[a,b]$$

תרגיל: לכל n, נגדיר חלוקה P_n של הקטע $[0,1]$ לפי $0=x_0,\dots,x_i=2^{-n}i,\dots x_{2^n}=1$. מהי ההשתנות של הפונקציה $f(x)=x$ ביחס לחלוקה P_n? מהי ההשתנות הכוללת של f בקטע?

פתרון: נחשב את ההשתנות לפי ההגדרה. נקבל לכל n כי

$$V(f,P_n)=\sum_{k=1}^{2^n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{2^n}\left|2^{-n}k-2^{-n}(k-1)\right|=\sum_{k=1}^{2^n}2^{-n}=1$$

למעשה, ההשתנות שקיבלנו לא תלויה ב־n. כדי לחשב את ההשתנות הכוללת נתבונן בחלוקה P כללית של הקטע. אז

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}|=\sum_{k=1}^{n}x_k-x_{k-1}=x_n-x_0=1$$

כלומר אין תלות בחלוקה P ולכן קיבלנו $T_0^1(f)=\sup_P V(f,P)=1$.

תרגיל: נגדיר פונקציה $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לפי $D=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. זו פונקצית דיריכלה. הוכיחו של־D אין השתנות חסומה באף קטע $[a,b]$ (בעל אורך חיובי).

פתרון: יהי $[a,b]$ קטע. נרצה לבנות חלוקה של הקטע כך שההשתנות של D ביחס לחלוקה תהיה גדולה כרצוננו. יהי n טבעי. מצפיפות הרציונלים בממשיים, נוכל להגדיר חלוקה $P_n: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, כאשר הנקודות x_i מתחלפות לסירוגין בין נקודות רציונליות לאי־רציונליות, פרט לקצוות שקבועים מראש. נחשב את ההשתנות ביחס לחלוקה:

$$V\left(D,P_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\left|D\left(x_k\right)-D\left(x_{k-1}\right)\right|\geq\sum_{k=2}^{n-1}\left|D\left(x_k\right)-D\left(x_{k-1}\right)\right|=\sum_{k=2}^{n-1}1=n-2$$

כעת קיבלנו כי לכל M יש $n>M$ כך ש־$V\left(D,P_n\right)>M$, ולכן $T_a^b\left(D\right)=\sup_P V\left(D,P\right)=\infty$ וההשתנות לא חסומה.

תרגיל: הראו כי הפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אינה בעלת השתנות חסומה בקטע $[0,1]$.

פתרון: נרצה להגדיר חלוקה שתופסת את התנודות של הפונקציה. נשים לב שהפונקציה $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ מקבלת ערך 1 עבור נקודות מהצורה $x_k=\frac{2}{\pi+4\pi k}$, ו־-1 עבור $x_k=\frac{2}{3\pi+4\pi k}$. לכל n נגדיר חלוקה

$$P_n:0<\frac{2}{3\pi+4\pi n}<\frac{2}{\pi+4\pi n}<\cdots\frac{2}{3\pi+4\pi k}<\frac{2}{\pi+4\pi k}<\cdots<\frac{2}{\pi}<1$$

כעת נחסום מלמטה את ההשתנות של f ביחס לחלוקה ונקבל

$$V\left(f,P_n\right)\geq\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_{2k}\right)-f\left(x_{2k-1}\right)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|x_{2k}\sin\left(\frac{1}{x_{2k}}\right)-x_{2k-1}\sin\left(\frac{1}{x_{2k-1}}\right)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)-\frac{2}{3\pi+4\pi k}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{2}{\pi+4\pi k}+\frac{2}{3\pi+4\pi k}\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+4k}+\frac{1}{3+4k}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{3+4k+1+4k}{\left(1+4k\right)\left(3+4k\right)}=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+2k}{\left(1+4k\right)\left(3+4k\right)}$$

כאשר נשאיף $n\to\infty$, נקבל טור מתבדר (אפשר לראות זאת למשל ממבחן ההשוואה הגבולי עם $\sum\frac{1}{k}$) . לכן באותו אופן ההשתנות לא חסומה.

טענה: תהיינה f,g פונקציות רציפות בהחלט בקטע $[a,b]$, ויהי $c\in\mathbb{R}$ קבוע. אז:

- cf רציפה בהחלט בקטע.
- $f+g$ רציפה בהחלט בקטע.
- fg רציפה בהחלט בקטע.

הוכחה: נוכיח ש־cf רציפה בהחלט. יהי $\varepsilon>0$. כיוון ש־f רציפה בהחלט, נבחר $\frac{\varepsilon}{|c|}$ ונקבל כי קיים $\delta>0$ כך שלכל אוסף קטעים $\{[a_k,b_k]\}$ זרים בזוגות, אם $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, אז $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{|c|}$. לכן עבור אותו δ וקטעים כנ"ל, מתקיים

$$\sum_{k=1}^{n}|cf(b_k)-cf(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}|c|\,|f(b_k)-f(a_k)|=|c|\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<|c|\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon$$

כלומר cf רציפה בהחלט בקטע.

נוכיח ש־$f+g$ רציפה בהחלט. יהי $\varepsilon>0$. כיוון ש־f רציפה בהחלט, קיים $\delta_1>0$ כך שלכל אוסף קטעים $\{[a_k,b_k]\}$ זרים בזוגות, אם $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta_1$, אז $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$. באותו אופן כיוון ש־$g$ רציפה בהחלט, קיים $\delta_2>0$ כך שלכל אוסף קטעים $\{[a_k,b_k]\}$ זרים בזוגות, אם $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta_2$, אז $\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. כעת לכל אוסף קטעים $\{[a_k,b_k]\}$ זרים בזוגות, אם $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, אז

$$\sum_{k=1}^{n}|(f+g)(b_k)-(f+g)(a_k)|\le\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|+\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\varepsilon$$

מאי שוויון המשולש.

נוכיח ש־fg רציפה בהחלט. נשים לב כי f,g רציפות בקטע סגור, ולכן על פי משפט ויירשטראס חסומות. כלומר קיים M כך ש־$|f|,|g|\le M$ בקטע. לפי הגדרת רציפות בהחלט של f ו־g, קיים $\delta>0$ כך שלכל אוסף קטעים $\{[a_k,b_k]\}$ זרים בזוגות, אם $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, אז $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|,\sum_{k=1}^{n}|g(b_k)-g(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2M}$. לכן עבור אותו δ מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|(fg)(b_k)-(fg)(a_k)|&=\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)g(b_k)-f(a_k)g(a_k)|\\&=\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)g(b_k)-f(b_k)g(a_k)+f(b_k)g(a_k)-f(a_k)g(a_k)|\\&=\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)(g(b_k)-g(a_k))+g(a_k)(f(b_k)-f(a_k))|\\&\le\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)(g(b_k)-g(a_k))|+\sum_{k=1}^{n}|g(a_k)(f(b_k)-f(a_k))|\\&<M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon\end{aligned}$$