תרגיל 4

שאלה 1: הוכיחו כי הבאים הם חוגים. קבעו האם אלו חוגים חילופיים, האם אלו חוגים עם יחידה והאם חוגים אלו עם חילוק.

(א) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}\,|a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)

(ב) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{a + b\sqrt{2}\,|a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ עם חיבור וכפל של מספרים שלמים (שימו לב שהקבוצה שהגדרנו היא תת קבוצה של המספרים הממשיים $\mathbb{R}$)

(ג) הקבוצה $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$ עם כפל וחיבור מטריצות.

(ד) קבוצת הפונקציות מהממשיים לממשיים $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f \text{ is function}\}$ עם חיבור פונקציות $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ וכפל מטריצות המוגדר כמכפלה $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(ה) הקבוצה $\subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ $\mathbb{H} = \left\{\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} :\ z, w \in \mathbb{C}\right\}$ עם חיבור וכפל מטריצות.

שאלה 2: יהיו $a = 80, n = 567$ מצא $d = \gcd(a, n)$ ומצא p, q כך ש $ap + qn = d$.
אם a הפיך מודולו n מצא את ההופכי שלו ופתור את המשוואה $ax \equiv 3 \bmod n$

שאלה 3: (א) נגדיר: $a(x) = 1 + 2x^2, b(x) = 2 + x \in \mathbb{R}[x]$ מצא $d = \gcd(a, b)$ ומצא p, q כך ש $ap + qb = d$

(ב) נגדיר: $a(x) = 7x^7 + 6x^6 + 5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x\,, b(x) = x^3 + x^2 \in \mathbb{R}[x]$ מצא $d = \gcd(a, b)$ ומצא p, q כך ש $ap + qb = d$

שאלה 4: יהא $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{Z}_2[x]/ < x^4 + x^3 + 1 >$ שדה. נסתכל על החבורה הכפלית $G = \mathbb{F}_{16} \setminus \{0\}$. הוכח כי $x \in G$ (הפולינום x) הוא יוצר של G. (רמז:לא צריך לחשב את כל החזקות של x אם נעזרים במשפט לגרנג)