משוואות דיפרנציאליות לכלכלנים

תרגיל בית 4 - פתרונות

<u>תרגיל 1</u> מצא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות בבעיות שפה הבאות:

א. $y''+\lambda y=0$, $y(0)=0,\ y'(1)=0$

ב. $y''+\lambda y=0$, $y'(0)=0,\ y(1)=0$

ג. $y''+\lambda y=0$, $y'(0)=0,\ y'(1)=0$

ד. $y''-\lambda y=0$, $y(0)=0,\ y'(1)=0$

<u>פתרון</u>

1.1) $\lambda_n=\left[\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]^2$, $y_n(x)=\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2}$, כאשר $n=1,2,3,\ldots$.

1.2) $\lambda_n=\left[\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]^2$, $y_n(x)=\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}$ כאשר $n=1,2,3,\ldots$.

1.3) $\lambda_n=(\pi n)^2$, $y_n(x)=\cos(\pi nx)$, כאשר $n=0,1,2,3,\ldots$. שים לב: כאן $\lambda_0=0$ ו-$y_0(x)=1$ כלולים בסט כאשר $n=0$.

1.4) $\lambda_n=-\left[\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]^2$, $y_n(x)=\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2}$ כאשר $n=1,2,3,\ldots$

<u>תרגיל 2</u> מצא ערכים עצמיים, פונקציות עצמיות וצורת המשוואה שמקיימת אותן. האם $\lambda=0$ הוא ערך עצמי?

א. $y''-\lambda y=0$, $y(0)+y'(0)=0,\ \ y(1)=0$

ב. $y''+\lambda y=0$, $y(0)=0,\ \ y(\pi)+y'(\pi)=0$

ג. $y''+\lambda y=0$, $y'(0)=0,\ \ y(1)+y'(1)=0$

ד. $y''+\lambda y=0$, $y(0)-y'(0)=0,\ \ y(1)+y'(1)=0$

ה. $y''+\lambda y=0$, $y(0)=y(2\pi),\ \ y'(0)=y'(2\pi)$

<u>פתרון</u>

2.1) $\lambda_0=0$, $y_0(x)=1-x$. עבור $n=1,2,3,\ldots$: $\lambda_n=-\mu_n^2$ ו- $y_n(x)=\sin\mu_n x-\mu_n\cos\mu_n x$, כאשר μ_n סידרת השורשים של המשוואה האלגברית $\underline{\mu=\tan\mu}$.

2.2) $y_n(x)=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)$ כאשר λ_n הם השורשים של המשוואה $\sqrt{\lambda}=-\tan\sqrt{\lambda}\,\pi$.

2.3) $y_n(x)=\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)$ כאשר λ_n הם השורשים של המשוואה $\sqrt{\lambda}=\cot\sqrt{\lambda}\,\pi$.

2.4) $y_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}\,x+\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$ כאשר λ_n הם השורשים של $(\lambda-1)\sin\sqrt{\lambda}-2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$.

-

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad (2.5$$
$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

פתרון מפורט:

1) המקרה $\lambda = 0$, המשוואה $y'' = 0$, פתרון שלה $y(x) = Ax + B$.

מחזוריות הפונקציה: $y(0) = y(2\pi) \Rightarrow B = A \cdot 2\pi + B \Rightarrow A = 0$

תבנית לפונקציה בהתחשבות לתנאי בקצה שמאל $y(x) = B$. הנגזרת שלה $y'(x) = 0$ ותנאי למחזוריות הנגזרת אינו נותן לנו מידע חדש. לכן $\lambda_0 = 0$ הוא ערך עצמי והפונקציה העצמית שלו היא $y_0(x) = 1$.

2) המקרה $\lambda = -\omega^2 < 0$. המשוואה $y'' - \omega^2 y = 0$, פתרון שלה $y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$.

מחזוריות הפונקציה: $y(0) = y(2\pi) \Rightarrow A + B = Ae^{2\pi\omega} + Be^{-2\pi\omega} \Rightarrow A\left(e^{2\pi\omega} - 1\right) + B\left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) = 0$

נגזרת הפתרון: $y'(x) = \omega\left(Ae^{\omega x} - Be^{-\omega x}\right)$

מחזוריות הנגזרת:

$$y'(0) = y'(2\pi) \Rightarrow \omega(A - B) = \omega\left(Ae^{2\pi\omega} - Be^{-2\pi\omega}\right) \Rightarrow A\left(e^{2\pi\omega} - 1\right) - B\left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) = 0$$

מערכת המשוואות הנ"ל נשתמש כילו לחיפוש המקדמים A – B:

$$\begin{cases} A\left(e^{2\pi\omega} - 1\right) + B\left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) = 0 \\ A\left(e^{2\pi\omega} - 1\right) - B\left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \left(e^{2\pi\omega} - 1\right) & \left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) \\ \left(e^{2\pi\omega} - 1\right) & -\left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נבדוק האם דטרמיננטה המערכת מתאפסת.

$$\begin{vmatrix} \left(e^{2\pi\omega} - 1\right) & \left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) \\ \left(e^{2\pi\omega} - 1\right) & -\left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2\left(e^{2\pi\omega} - 1\right)\left(e^{-2\pi\omega} - 1\right) = 0 \Rightarrow e^{2\pi\omega} + e^{-2\pi\omega} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2\pi\omega} + e^{-2\pi\omega}}{2} = 1 \Rightarrow \cosh(2\pi\omega) = 1 \Rightarrow 2\pi\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

זה סותר להנחה ש $-\omega^2 < 0$. מפני שהדטרמיננטה אינה מתאפסת, הפתרון האפשרי הוא $A = B = 0$, וכנראה $y(x) \equiv 0$. המקרה הזה אינו נותן לנו ערכים עצמיים.

3) המקרה $\lambda = \omega^2 > 0$. המשוואה $y'' + \omega^2 y = 0$, פתרון שלה $y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$.

מחזוריות הפונקציה:

$$y(0) = y(2\pi) \Rightarrow A = A\cos 2\pi\omega + B\sin 2\pi\omega \Rightarrow A\left(\cos 2\pi\omega - 1\right) + B\sin 2\pi\omega = 0$$

נגזרת הפתרון: $y'(x) = \omega\left(B\cos\omega x - A\sin\omega x\right)$

מחזוריות הנגזרת:

$$y'(0) = y'(2\pi) \Rightarrow = \omega B = \omega\left(B\cos 2\pi\omega - A\sin 2\pi\omega\right) \Rightarrow -A\sin 2\pi\omega + B\left(\cos 2\pi\omega - 1\right) = 0$$

$$\begin{cases} A\left(\cos 2\pi\omega - 1\right) + B\sin 2\pi\omega = 0 \\ -A\sin 2\pi\omega + B\left(\cos 2\pi\omega - 1\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \left(\cos 2\pi\omega - 1\right) & \sin 2\pi\omega \\ -\sin 2\pi\omega & \left(\cos 2\pi\omega - 1\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נבדוק תנאי כאשר דטרמיננטה המערכת מתאפסת.

$$\begin{vmatrix} \left(\cos 2\pi\omega - 1\right) & \sin 2\pi\omega \\ -\sin 2\pi\omega & \left(\cos 2\pi\omega - 1\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\cos 2\pi\omega - 1\right)^2 + \sin^2 2\pi\omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 2\pi\omega - 2\cos 2\pi\omega + 1 + \sin^2 2\pi\omega = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos 2\pi\omega + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2\pi\omega = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\pi\omega = 2\pi n \Rightarrow \omega_n = n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

לכן במקרה הנחקר ערכים עצמיים $\lambda_n = n^2$ ופתרון מד"ר הוא $y_n(x) = A\cos nx + B\sin nx$. זאת אומרת שהפתרון מהווה מרכב עצמי דו-מימדי בעל פונקציות עצמיות $y_{n1}(x) = \sin nx$ ו- $y_{n2}(x) = \cos nx$.

תשובה סופית:

$\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$, $\lambda_n = n^2$, $y_{n1}(x) = \sin nx$ ו- $y_{n2}(x) = \cos nx$ כאשר $n = 1, 2, 3, \ldots$.

כאן לכול אחד ערך עצמי כאשר $n > 0$ מתאימים 2 פונקציות עצמיות בלתי תלויות ליניאריות.

תרגיל 3 פתרו את משוואת חום: $u_t = u_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$ עם תנאי התחלה הבאים:

א. $u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$ ב. $u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ ג. $u(x,0) = e^{-x^2}$

פתרון

א. $u(x,t) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}$

ב. $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right)$

ג.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\,ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-4ts^2 - s^2 + 2xs}{4t}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}\left[\left(s\sqrt{1+4t} - \frac{x}{\sqrt{1+4t}}\right)^2 - \frac{x^2}{1+4t}\right]} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}\left(s\sqrt{1+4t} - \frac{x}{\sqrt{1+4t}}\right)^2} e^{\frac{x^2}{4t(1+4t)}} ds =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{x^2}{4t(1+4t)} - \frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}\left(s\sqrt{1+4t} - \frac{x}{\sqrt{1+4t}}\right)^2} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4t}\left(s\sqrt{1+4t} - \frac{x}{\sqrt{1+4t}}\right)^2} ds =$$

$$\left\{ z = \frac{s\sqrt{1+4t} - \frac{x}{\sqrt{1+4t}}}{2\sqrt{t}},\ dz = \frac{\sqrt{1+4t}}{2\sqrt{t}} ds \right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$$

תרגיל 4 השתמשו בשיטת הפרדת משתנים כדי לפתור את משוואות חום הבאות:

א.
$$u_t = 100u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$\begin{cases} u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) - 2\sin(5\pi x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ב.
$$4u_t = u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0$$
$$\begin{cases} u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin(\pi x/2) - \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x), & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

ג.
$$3u_t = u_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0$$
$$\begin{cases} u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x(2-x), & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

<u>פתרון</u>

א.

נשתמש בשיטת הפרדת המשתנים של פורייה: $u(x,t)=X(x)T(t)$.

המשוואה הופכת ל- $X(x)T'(t)=100X''(x)T(t)$.

הפרדת המשתנים $-\lambda=\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{100T(t)}$. לכן נקבל **(א)** $T'=-100\lambda T \quad \Leftarrow \quad T(t)=ce^{-100\lambda t}$

ו-(ב) $X''(x)+\lambda X(x)=0$ עם תנאי שפה $X(0)=X(1)=0$. הביטוי האחרון נקבל מתנאי שפה לפונקציה $u(x,t)$:

$u(0,t)=X(0)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$, וגם $u(1,t)=X(1)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(1)=0$.

הפתרון לבעיית ערך שפה (בעיית שטורם-ליוביל) $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(1)=0 \end{cases}$ הוא סט של ערכים עצמיים ופונקציות

עצמיות $\begin{cases} \lambda_n=(\pi n)^2, \ n\in \mathbf{N} \\ X_n(x)=\sin(\pi n x) \end{cases}$.

ניתן לפתח אותו בפירוט:

משוואה אופיינית היא $k^2+\lambda=0$, וברור תבנית הפתרון של מד"ר מוגדרת ע"י הערך של λ.

<u>מקרה</u> $\boxed{\text{א}}$ $\lambda=0$, $k_{1,2}=0$, $X(x)=A+Bx$.

קצה שמאלי: $A=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$. אחרי עדכון $X(x)=Bx$.

קצה ימני: $B=0 \quad \Rightarrow \quad X(1)=0$.

סיכום: $\lambda_0=0$ אינה מהווה ערך עצמי.

<u>מקרה</u> $\boxed{\text{ב}}$ $\lambda<0$, $\lambda=-\omega^2<0$. $k_{1,2}=\pm\omega$, $X(x)=A\cosh(\omega x)+B\sinh(\omega x)$.

קצה שמאלי: $X(x)=B\sinh(\omega x) \quad \Rightarrow \quad A=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$.

קצה ימני: $\omega=0 \quad \Rightarrow \quad \omega B\sinh(\omega)=0 \quad \Rightarrow \quad X(1)=0$.

סיכום: התוצאה $\omega=0$ סותרת להנחה $\omega^2>0$ לכן אין ערכים עצמיים שליליים.

<u>מקרה</u> $\boxed{\text{ג}}$ $\lambda>0$, $\lambda=\omega^2>0$ $k_{1,2}=\pm i\omega$, $X(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$.

קצה שמאלי: $X=B\sin(\omega x) \quad \Rightarrow \quad A=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$.

קצה ימני: $(n=1,2,3,\ldots) \quad \omega_n=\frac{\pi n}{2} \quad \Rightarrow \quad B\sin(\omega)=0 \quad \Rightarrow \quad X(1)=0$.

סיכום: $\lambda_n=\omega_n^2=(\pi n)^2$ אלה ערכים עצמיים, כאשר $n\in \boldsymbol{N}$. הפונקציות העצמיות $X_n(x)=\sin(\pi n x)$

פתרונות למשוואת (א) $T_n(t)=c_n e^{-(10\pi n)^2 t}$. פונקציות בסיסיות של הפתרון: $u_n(x,t)=e^{-(10\pi n)^2 t}\sin(\pi n x)$.

הפתרון הוא $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(10\pi n)^2 t}\sin(\pi n x)$. כאשר $t=0$: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\pi n x)$.

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\pi n x)\,dx=2\int_0^1 [\sin(2\pi x)-2\sin(5\pi x)]\sin(\pi n x)\,dx=$$

$$=2\int_0^1 \sin(2\pi x)\sin(\pi n x)\,dx-2\cdot 2\int_0^1 \sin(5\pi x)\sin(\pi n x)\,dx=\begin{Bmatrix} 1, & n=2 \\ 0, & n\neq 2 \end{Bmatrix}-2\cdot\begin{Bmatrix} 1, & n=5 \\ 0, & n\neq 5 \end{Bmatrix}$$

לכן, מכול טור אינסופי נשארו 2 איברים בלבד:

$$\underline{u(x,t)=e^{-(10\cdot 2\pi)^2 t}\sin(2\pi x)-2e^{-(10\cdot 5\pi)^2 t}\sin(5\pi x)=e^{-400\pi^2 t}\sin(2\pi x)-2e^{-2500\pi^2 t}\sin(5\pi x)}$$

ב.

המשוואה הופכת ל- $u(x,t)=X(x)T(t) \quad \Leftarrow \quad X''(x)T(t)=4X(x)T'(t)$.

הפרדת המשתנים $\frac{4T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$. לכן נקבל **(א)** $T'=-\frac{\lambda}{4}T \quad \Leftarrow \quad T(t)=ce^{-\frac{\lambda}{4}t}$

ו-**(ב)** $X''(x)+\lambda X(x)=0$ עם תנאי שפה $X(0)=X(2)=0$. הפתרון לבעיית ערך שפה (בעיית שטורם-ליוביל)

$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(2)=0 \end{cases}$ הוא ערכים עצמיים $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2$ ופונקציות עצמיות $X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$, $n\in\mathbf{N}$.

פתרונות למשוואת **(א)** $T_n(t)=c_n e^{-\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 t}$. פונקציות בסיסיות של הפתרון: $u_n(x,t)=e^{-\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$.

הפתרון הוא $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$. כאשר $t=0$: $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$.

נחשב מקדמי טור פורייה:

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\pi n x)\,dx=\int_0^2\left[2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\sin(\pi x)+4\sin(2\pi x)\right]\sin(\pi n x)\,dx=$$

$$=2\int_0^2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin(\pi n x)\,dx-\int_0^2\sin(\pi x)\sin(\pi n x)\,dx+4\int_0^2\sin(2\pi x)\sin(\pi n x)\,dx=$$

$$=\begin{Bmatrix} 2, & n=1 \\ 0, & n\neq 1\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} 1, & n=2 \\ 0, & n\neq 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 4, & n=4 \\ 0, & n\neq 4\end{Bmatrix}.$$

לכן, מכול טור אינסופי נשארו רק 2 איברים לערכים $n=1,2,4$:

$$\underline{u(x,t)=2e^{\frac{-\pi^2}{16}t}\sin\frac{\pi x}{2}-e^{\frac{-\pi^2}{4}t}\sin(\pi x)+4e^{-\pi^2 t}\sin(2\pi x)}$$

ג.

כרגיל נשתמש בשיטת הפרדת המשתנים של פורייה: $u(x,t)=X(x)T(t)$. משוואה הופכת ל-
$X''(x)T(t)=3X(x)T'(t)=$.

הפרדת המשתנים $\frac{3T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$. לכן נקבל **(1)** $T'=-\frac{1}{3}\lambda T \quad \Leftarrow \quad T(t)=ce^{-\frac{\lambda}{3}t}$

ו-**(2)** $X''(x)+\lambda X(x)=0$ עם תנאי שפה $X'(0)=X'(2)=0$. הביטוי האחרון נקבל מתנאי שפה לפונקציה $u(x,t)$: $u_x(0,t)=X'(0)T(t)=0 \quad \Leftarrow \quad X'(0)=0$, וגם $u_x(2,t)=X'(2)T(t)=0 \quad \Leftarrow \quad X'(2)=0$.

בעיית ערך שפה (בעיית שטורם-ליוביל) כאן היא $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(2)=0 \end{cases}$.

נפתור את הבעיה בפירוט.

משוואה אופיינית היא $k^2+\lambda=0$, וברור תבנית הפתרון של מד"ר מוגדרת ע"י הערך של λ .

<u>מקרה</u> $\boxed{\text{א}}$ $\lambda=0$, $k_{1,2}=0$, $X(x)=A+Bx \quad \Leftarrow \quad X'(x)=B$.

קצה שמאלי: $B=0 \quad \Rightarrow \quad X'(0)=0$. אחרי עדכון $X(x)=A \quad \Leftarrow \quad X'(x)=0$.

קצה ימני: $0=0 \quad \Rightarrow \quad X'(2)=0$, ואין תשובה חד-משמעית ל-B.

סיכום: $\lambda_0=0$ היא ערך עצמי ופונקציה עצמית שבהתאם לה היא $X_0=1$.

מקרה $\boxed{\text{ב}}$ $\lambda<0$, $\lambda=-\omega^2<0$. $k_{1,2}=\pm\omega$.

$X(x)=A\cosh(\omega x)+B\sinh(\omega x) \Leftarrow X'(x)=\omega\left[A\sinh(\omega x)+B\cosh(\omega x)\right]$.

קצה שמאלי: $X'=\omega A\sinh(\omega x) \Rightarrow X=A\cosh(\omega x) \Rightarrow B=0 \Rightarrow \omega B=0 \Rightarrow X'(0)=0$.

קצה ימני: $\omega=0 \Rightarrow \omega A\sinh(2\omega)=0 \Rightarrow X(2)=0$.

סיכום: התוצאה $\omega=0$ סותרת להנחה $\omega^2>0$ לכן אין ערכים עצמיים שליליים.

מקרה $\boxed{\text{ג}}$ $\lambda>0$, $\lambda=\omega^2>0$. $k_{1,2}=\pm i\omega$.

$X(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x) \Leftarrow X'(x)=\omega\left[-A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)\right]$.

קצה שמאלי: $X'=-\omega A\sin(\omega x) \Rightarrow X=A\cos(\omega x) \Rightarrow B=0 \Rightarrow \omega B=0 \Rightarrow X'(0)=0$.

קצה ימני: $(n=1,2,3,\ldots) \quad \omega_n=\dfrac{\pi n}{2} \Rightarrow \sin(2\omega)=0 \Rightarrow -\omega A\sin(2\omega)=0 \Rightarrow X'(2)=0$.

סיכום: $\lambda_n=\omega_n^2=\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)^2$ אלה ערכים עצמיים, כאשר $n=1,2,3,\ldots$. הפונקציות העצמיות $X_n(x)=\cos\dfrac{\pi nx}{2}$

פתרון לבעיית שטורם-ליוביל: $\boxed{\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)^2 \quad , \quad X_n(x)=\cos\dfrac{\pi nx}{2} \text{ , כאשר } n=\mathbf{0},1,2,3,4,\ldots}$.

פתרונות למשוואה **(1)**: $T_n(t)=c_n e^{-\frac{(\pi n)^2}{12}t}$ כאשר $n=1,2,3,\ldots$ ו- $T_0(t)=\dfrac{c_0}{2}$ $(n=0)$.

פונקציות בסיסיות של הפתרון: $u_n(x,t)=e^{-\frac{(\pi n)^2}{12}t}\cos\dfrac{\pi nx}{2}$ כאשר $n=1,2,3,\ldots$ ו- $u_0(x,t)=\dfrac{1}{2}$.

הפתרון הוא $u(x,t)=\dfrac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\frac{(\pi n)^2}{12}t}\cos\dfrac{\pi nx}{2}$. כאשר $t=0$: $u(x,0)=\dfrac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\dfrac{\pi nx}{2}$.

בביטוי האחרון ניתן לזהות טור פורייה של קוסינוסים. מקדמי של הטור יש לחשב.

$$c_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\int_0^2 x(2-x)dx=2\int_0^2 xdx-\int_0^2 x^2dx=\frac{4}{3} \quad ,$$

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\int_0^2 x(2-x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=2\int_0^2 x\cos\frac{\pi nx}{2}dx-\int_0^2 x^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\frac{8\left[(-1)^{n+1}-1\right]}{\pi^2n^2} \quad .$$

תשובה סופית: $\underline{u(x,t)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}-1}{\pi^2n^2}e^{-\frac{(\pi n)^2}{12}t}\cos\dfrac{\pi nx}{2}}$