תרגיל 9

25 בינואר 2017

שאלה 1

הוכח או הפרך: תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, אזי שלושת המרחבים היסודיים של αAו־A הם שווים.

פתרון:

הוכחה: נוכיח עבור מרחב האפס, עבור שאר המרחבים ההוכחה דומה.
נוכיח ש־$N(A) = N(\alpha A)$ ע"י הכלה דו כיוונית:
$\supseteq$יהא $x \in N(\alpha A)$ אזי $\alpha Ax = 0$ נכפול ב־α^{-1} נכפול ב־α^{-1} ונקבל $Ax = 0$ ולכן $x \in N(A)$.
$\subseteq$ יהא $x \in N(A)$ ולכן $Ax = 0$ ולכן $\alpha Ax = 0$ ולכן $x \in N(\alpha A)$.

שאלה 2

הוכח או הפרך: תאה $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, כך ששלושת המרחבים היסודיים של שתי המטריצות שווים, אזי $B = \alpha A$.

פתרון:

הפרכה: ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, אזי קל לראות ש־ $C(A) = C(B) = R(A) = R(B) = \mathbb{R}^2$, בנוסף לפי המשפט על המימדים נקבל ששאר המרחבים שווים ל־$\{0\}$, ולכן 4 המרחבים היסודיים שווים אבל B אינה כפולה של A.

שאלה 3

תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, הוכח שאם העמודות AB בלתי תלויות אז עמודות B בלתי תלויות.

פתרון:

מהנתון $rank(AB) = p$ ולכן $p = rank(AB) \leq rank(B) \leq p$ ומכאן ש־$rank(B) = p$, כלומר עמודות B בת"ל (ע"פ משפט שקילות שהוכחנו בכיתה).

שאלה 4

א) יהיו $v_1=(1,5,3)$, $v_2=(9,1,1)$, חשב את הזווית בין שני הווקטורים.

פתרון:
נחשב קודם כל את המכפלה פנימית של שני וקטורים:
$v_1\cdot v_2=9\cdot 1+5\cdot 1+3\cdot 1=17$
נחשב את הנורמה גם של v_1, v_2:
$\|v_1\|=\sqrt{1^2+5^2+3^2}=\sqrt{35}$
$\|v_2\|=\sqrt{9^2+1+1}=\sqrt{83}$
ולכן לפי נוסחה שראינו בכיתה הזווית בין שני הוקטורים האלה היא:
$\theta=arccos\left(\frac{17}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{83}}\right)$

ב) יהיו u,v שני וקטורים ונניח שהזווית ביניהם היא π, מה אפשר להגיד עליהם?

פתרון:
הווקטורים תלויים לינארית, אך הם מכיוונים מנוגדים.

שאלה 5

הוכח את השוויון הבא:

$$u\cdot v=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$$

פתרון:
$\|u+v\|^2-\|u-v\|^2=<u+v,u+v>-<u-v,u-v>=<u+v,u>+<u+v,v>-$
$-(<u-v,u>-<u-v,v>)=<u,u>+<v,u>+<u,v>+<v,v>-$
$-(<u,u>-<v,u>-<u,v>+<v,v>)=4<u,v>$
נחלק ב־4 את שני האגפים ונקבל את הדרוש.
הערה:
ההוכחה הזאת נכונה אם נמצאים ב־$\mathbb{R}^n$, אבל לא באופן כללי.