מבחן באלגברה לינארית 1

8811201 מועד א

מרצה: ד"ר אליהו מצרי

יש לענות על **כל 4** השאלות.

יש לנמק היטב כל טענה ומעבר שאתם עושים.

משך הבחינה: שלוש שעות (לאחר הארכה)

חומר עזר מותר: מחשבון פשוט.

<u>שאלה 1:</u>

נסח והוכח את משפט המימדים לתת מרחבים וקטורים.

<u>שאלה 2:</u>

תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\4&3&2\\9&6&5\end{pmatrix}$ ויהי $B=\{1,1+x^2,x+x^2\}$ תת קבוצה של המרחב הוקטורי $\mathbb{R}_2[x]$.

א) הוכח כי B בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$.

ב) מצא במפורש הע"ל $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ כך ש $[T]_B^B=A$.

ג) האם ההעתקה שמצאת חח"ע? על? מצא בסיס ומימד עבור $Ker(T),\mathrm{Im}(T)$.

<u>שאלה 3:</u>

יהי $V=M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ותהי $S:V\to V$ העתקה המוגדרת לפי:

$$S(A)=\frac{1}{2}(A+A^T)$$

א) הוכח כי S העתקה לינארית.

ב) מצא בסיס ומימד עבור $Ker(S),\mathrm{Im}(S)$.

ג) הוכח כי $V=Ker(S)\oplus\mathrm{Im}(S)$.

ד) יהיו B_1 הבסיס שמצאת עבור $Ker(S)$ ו B_2 הבסיס שמצאת עבור $\mathrm{Im}(S)$.
נגדיר את $B=B_1\cup B_2$. הוכח כי B בסיס ל V.

ה) חשוב על B כעל בסיס סדור וחשב את $[S]_B^B$.

שאלה 4: הוכח או הפרך

א) יהי V מרחב וקטורי ויהיו $u,v,w \in V$ שלושה וקטורים בלתי תלויים לינארית אז הקבוצה $A=\{v+u, v+w, u+w\}$ בלתי תלויה לינארית.

ב) תהיינה B_1, B_2 שתי קבוצות בלתי תלויות לינארית כך ש $B_1 \cap B_2 = \varnothing$, אז $B_1 \cup B_2$ גם בלתי תלויה לינארית.

ג) תהי $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ מטריצה כך שלמערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש פיתרון לא טריוויאלי, אז קיים ווקטור $v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ כך שלמערכת הלא הומוגנית $Ax=v$ אין פתרון.

ד) יהי $V=\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ העתקה המוגדרת לפי $T(v)=\bar{v}$ (הצמדה מרוכבת) אז T העתקה לינארית.

בהצלחה!