שיעורי בית 5

1. יהי $\mathbb{R}^4 \supseteq \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = S$. מצאו בסיס ל $W = S^{\perp}$.
(כאשר $\mathbb{R}^4$ עם המכפלה הסקלארית).

2. סטודנט סקרן החליט לבדוק מה עומד מאחורי הצלחתו במבחני התואר. הוא החליט שהפרמטרים הקובעים הם: P_1 מספר השעות שהקדיש ללימוד למבחן, P_2 מספר שיעורי הבית שפתר ו P_3 מספר הספרים שהוא קרא בנושא. הוא אסף את הנתונים הבאים מ 4 קורסים שונים

	P_1	P_2	P_3	Final Grade
1	4	2	3	7
2	2	3	3	4
3	4	4	5	8
4	2	5	5	6

השאלה שעמדה בפני הסטודנט היא מה המשקל שתרם כל פרטמר לציון המבחן. הוא החליט לסמן ב x_i את המשקל שתורם פרמטר P_i לציון הסופי וניסה למצוא אותם ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

אך לצערו, לא נמצא פתרון... הסטודנט לא אמר נואש והחליט להשתמש בידע שרכש בקורס אלגברה לינארית... הוא החליט למצוא c_1, c_2, c_3 כך שוקטור התוצאה $b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{pmatrix}$ שמחושב ע"י

$$\begin{aligned} 4c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= b'_1 \\ 2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= b'_2 \\ 4c_1 + 4c_2 + 5c_3 &= b'_3 \\ 2c_1 + 5c_2 + 5c_3 &= b'_4 \end{aligned}$$

יהיה הכי קרוב לוקטור התוצאה האמיתי $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$. כוונתו ב"קרוב" הוא למזער את $\|b - b'\|$ (כאשר $\|*\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית המוגדרת על

$\mathbb{R}^4$). מצאו גם אתם את $c_!, c_2, c_3$.

[הדרכה: יצגו את הבעיה כמערכת משוואות $Ax=b$ וחשבו איך הבעיה של הסטודנט שקולה למיצאת הטלה של b על איזה שהוא תת מרחב (שהוא יהיה b')... לאחר מכן פתרו את המשוואה $Ax=b'$. אזהרה: תרגיל עם חישובים לפניך]

3. יהא $V=\mathbb{R}^5$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. נגדיר

$$W=\operatorname{span}\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ת"מ של V.

(א) מצאו בסיס אורתוגונאלי ל W ע"י שימוש בתהליך גרם שמידט על הבסיס $B=\{v_1,v_2,v_3\}$.

(ב) מצאו את ההטלה (הניצבת/האורתוגונלית) של $v=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ על $W'=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$ (כלומר מצאו $\pi_{W'}(v)$)

4. תהא $H\in\mathbb{R}^{m\times n}$ שעמודותיה בת"ל.

(א) הוכיחו כי H^tH הפיכה. [הדרכה: הוכיחו תחילה כי $N(H^tH)=N(H)$].

(ב) עבור מערכת משוואת $Hx=b$ הוקטור $\tilde{x}=\left(H^tH\right)^{-1}H^tb$ נקרא קירוב הריבועים הפחותים (LSQ). הוכיחו כי $\min\left\{\sum_{i=1}^m\left(b_i-[Hx]_i\right)^2 : x\in\mathbb{R}^n\right\}$ מתקבל ב $\tilde{x}$.

5. מצאו דוגמא ל V ממ"פ ו $T:V\to V$ ה"ל ו W ת"מ שהוא T- אינוואראנטי כך ש W אינו T^*-אינוואראנטי.

6. יהא $(V,\langle\rangle)$ ממ"פ ו יהא $W\le V$ ת"מ

(א) הוכיחו כי לכל $w\in W$ ולכן $v\in V$ מתקיים כי $\langle w,\pi_W(v)\rangle=\langle w,v\rangle$

(ב) יהא $T:V\to V$ אופרטור כך ש W הוא T-אינוואראנטי. נגדיר $T|_W:W\to W$ את הצמצום של T ל W. הוכיחו כי $\left(T|_W\right)^*:W\to W$ היא $\left(T|_W\right)^*=\pi_W\circ\left(T^*|_W\right)$.