

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות

תרגיל מספר 7:

הגשה: 23-24 במאי.

שאלה 1:

רכבת מגיעה לתחנה כל 15 דקות החל מהשעה שש בבוקר. אדם מגיע לתחנה כל בוקר בין השעה שבע ועשרה לשבע וחצי. יהי X מספר הדקות משבע ועשרה עד להגעת האדם לתחנה. ויהי Y מספר הדקות שהאדם נדרש לחכות לרכבת. חשבו את פונקציות ההצטברות והצפיפות של Y בהינתן אלו של X

שאלה 2: (קשה)

נניח כי הפיתרונות של המשוואה $x^2 + ax + b = 0$ הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה: $X_1 \sim U(-1,1)$ ו- $X_2 \sim U(0,1)$

- א. מהי ההסתברות ש $a > b$?
ב. בהינתן ש $a > -1$ מהי ההסתברות ש $b > 0$?

נניח עתה שבמקום X_1, X_2 , $a \sim U(0,1), b \sim U(0,1)$ הם המשתנים המקריים הנתונים של המשוואה הריבועית. (שימו לב שגם קודם הם היו משתנים מקריים אך מן הסתם לא ניתנו מפורשות)

ג. חשבו את ההסתברות ש- $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ ושמקיים $|X_1 - X_2| < \frac{1}{2}$?

שאלה 3:

יהי X משתנה מקרי המתפלג אחיד על-פני $[-1,1]$.

- א. מצא את התפלגות $\sqrt{|X|}$
ב. מצא את התפלגות $-\ln(|X|)$.

שאלה 4:

פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y נתונה ע"י $0 < x < 1, 0 < y < 2$ $f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right)$

- א. בדקו שזוהי אכן פונקציית צפיפות משותפת.
ב. חשבו את פונקציית הצפיפות השולית של X .

שאלה 5:

נתון $X \sim \exp(\lambda)$ ויהי $Y = X^3$ מהי פונקציית הצפיפות של המ"מ Y ?

שאלה 6:

המשתנה המקרי X מתפלג מעריכית עם פרמטר λ . המשתנה המקרי Y מוגדר ע"י:

$$Y = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1, & a < x < b \\ 2, & x \geq b \end{cases} \quad \text{כאשר } a, b \text{ הם מספרים שלמים חיוביים.}$$

בטאו את a ו b , כפונק' של λ , כך של- Y תהיה התפלגות אחידה על $\{0,1,2\}$.

שאלה 7:

יהי X משתנה מיקרי רציף המתפלג בצורה אחידה בקטע $[0,1]$. נניח כי $Y|X = x$ מתפלג בצורה אחידה בקטע $(x, x + 1)$.

- א. מהי פונקצית הצפיפות המשותפת של X ו- Y ?
- ב. מצאו את הצפיפות השולית של Y .
- ג. האם X ו- Y תלויים?
- ד. מהי פונקצית הצפיפות של $X|Y = y$? כיצד מתפלג $X|Y = y$?
- ה. חשבו את $E(Y|X)$.
- ו. חשבו את $E(Y)$.