תגבור – משוואות דיפרנציאליות

משוואה ליניארית מסדר ראשון

משוואה ליניארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה $y'+p(x)y=q(x)$.

כאשר $q(x)=0$ נאמר שהמשוואה הומוגנית. ז"א $y'+p(x)y=0$.

פתרון משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון

$$y'+p(x)y=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y$$
$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$
$$\ln y=-\int p(x)dx+c$$
$$y=c_1e^{-\int p(x)dx}$$

דוגמא

$$y'-y\sin x=0$$
$$y'=y\sin x$$
$$\frac{dy}{dx}=y\sin x$$
$$\frac{dy}{y}=\sin xdx$$
$$\ln y=-\cos x+c$$
$$y=c_1e^{-\cos x}$$

משפט

כל פתרון של משוואה לא הומוגנית הוא סכום פתרון כללי של משוואה הומוגנית ופתרון פרטי של משוואה לא הומוגנית.

דרך לפתרון משוואה לא הומוגנית מסדר ראשון

שלב א: נמצא פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.

שלב ב: נמצא בעזרת ניחוש פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

שלב ג: נחבר את התשובות שקיבלנו בשלבים הקודמים.

דוגמא

$$y'+\frac{y}{x}=3x$$

פתרון

שלב א: נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית $y'+\frac{y}{x}=0$

$$y'=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=-\ln x+\ln c\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

שלב ב: נשים לב ש $y_p=x^2$ מהווה פתרון למשוואה הלא הומוגנית

שלב ג: הפתרון הכללי הוא $y=\frac{c}{x}+x^2$

ניתן למצוא את הפתרון הכללי גם ללא ניחוש אלא בשיטת וריאציית המקדמים.

נרשום את הקבוע בפתרון של המשוואה ההומוגנית כמשתנה של x ונציב במשוואה הלא הומוגנית

$$y=\frac{c(x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}\Rightarrow\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}+\frac{c(x)}{x^2}=3x\Rightarrow\frac{c'(x)}{x}=3x$$

$$c'(x)=3x^2\Rightarrow c(x)=x^3\Rightarrow y=x^2$$

וקיבלנו פתרון פרטי גם ללא שיטת הניחוש.

<u>תרגיל</u>

פתור את המשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

<u>פתרון</u>

ראינו מקודם שהפתרון של המשוואה $y'-y\sin x=0$ הוא $y=ce^{-\cos x}$.

נמצא בעזרת וריאציית המקדמים פתרון פרטי למשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

$$y=c(x)e^{-\cos x}\Rightarrow y'=c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}-c(x)\sin xe^{-\cos x}=\sin x\cos x$$

$$c'(x)=\sin x\cos xe^{\cos x}\Rightarrow c(x)=-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}$$

הפתרון הפרטי הוא $y=\left(-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}\right)e^{-\cos x}\Rightarrow y=-\cos x+1$.

הפתרון הכללי הוא $y=ce^{-\cos x}-\cos x+1$.

<u>תרגיל</u>

פתור את המשוואה $y'+\tan y=\frac{x}{\cos y}$.

<u>פתרון</u>

נציב $t=\sin y\Leftarrow t'=y'\cos y$

$$t'+t=x\Leftarrow y'\cos y+\sin y=x\Leftarrow y'+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{x}{\cos y}$$

קיבלנו משוואה שאנו יודעים לפתור $t=ce^{-x}+x-1$ ואז $y=\arcsin\left(ce^{-x}+x-1\right)$.

<u>הערה</u>

פתרון שלא ניתן להגיע אליו בעזרת הפתרון הכללי נקרא פתרון סינגולארי.

<u>דוגמא</u>

$$y'=-2xy^2$$

נמצא פתרון כללי למשוואה

$-\frac{y'}{y^2}=2x$ נציב $t=\frac{1}{y}\Leftarrow t'=-\frac{y'}{y^2}\Leftarrow t'=2x\Leftarrow t=x^2+c\Leftarrow y=\frac{1}{x^2+c}$.

נשים לב ש $y=0$ הוא גם פתרון של המשוואה אבל לא ניתן להגיע אליו מהפתרון הכללי ולכן הוא פתרון סינגולארי.

<u>משוואה מדויקת</u>

למשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ קוראים משוואה מדוייקת אם האגף השמאלי של המשוואה מייצג דיפרנציאל שלם של פו' כלשהי.

<u>משפט אוילר</u>

המשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

דרך לפתרון משוואה מדויקת

$u(x,y)=c \Leftarrow du=M(x,y)dx+N(x,y)dy, M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

מטרה לחשב את $u(x,y)$.

מכיון ש $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ נקבל ש

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

ואז $(1) u(x,y)=\int M(x,y)dx+c(y)$

נגזור לפי y ונקבל $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+c(y)\right)=N(x,y)$

$$\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+c'(y)=N(x,y)$$

ואז

$$c'(y)=-\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+N(x,y)$$

מכיון שזו משוואה מדויקת נקבל שהאגף הימני של המשוואה תלוי ב y בלבד ולכן נוכל למצוא את $c(y)$. נציב ב (1) ונקבל $u(x,y)$ נשווה לקבוע ונקבל את הפתרון.

תרגיל

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

נבדוק שהמשוואה מדויקת

$$M(x,y)=3x^2+6xy^2, N(x,y)=6x^2y+4y^3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=12xy, \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3$$

ואז $u(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx+c(y)$

נקבל ש $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+c(y)$.

נגזור לפי y ונקבל

$$6x^2y+4y^3=6x^2y+c'(y)$$
$$c'(y)=4y^3$$
$$c(y)=y^4$$

נציב חזרה ונקבל $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$.

הפתרון הוא $x^3+3x^2y^2+y^4=c$.