טופולוגיה - תרגול 1

25.2.14

המתרגל: מנחם שוסברג

* אין חובת הגשת תרגילים (מומלץ להכין את התרגילים כי הם יהיו בבוחן ובמבחן, כנראה).

* יהיה בוחן אמצע

* אתר הקורס: math-wiki

הגדרה:

תהי $f:X\to Y$ פונקציה. יהיו $A\subseteq X$ ו- $B\subseteq Y$ קבוצות כלשהן.

אזי התמונה של A היא $f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$, והתמונה ההפוכה של B

היא: $f^{-1}[B]=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$.

טענה:

1. אם $A\subseteq B\subseteq Y$ אזי $f^{-1}[A]\subseteq f^{-1}[B]\subseteq X$
2. אם $A\subseteq B\subseteq X$ אזי $f(A)\subseteq f(B)\subseteq Y$.

הוכחה:

נוכיח רק את 1:

יהי $x\in f^{-1}[A]$ אזי $f(x)\in A$.

נתון ש- $A\subseteq B$ ולכן $f(x)\in B$. לפי ההגדרה, $x\in f^{-1}[B]$. מכאן $f^{-1}[A]\subseteq f^{-1}[B]$.

טענה:

$$f^{-1}\Big[\bigcup_{i\in I} B_i\Big]=\bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$$

הוכחה:

בכיוון $\supseteq$: לכל $i\in I$, $B_i\subseteq\bigcup_{i\in I}B_i$.

לפי הטענה הקודמת, לכל $i\in I$ $f^{-1}[B_i]\subseteq f^{-1}[\bigcup_{i\in I}B_i]$.

מכאן, $\bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]\subseteq f^{-1}[\bigcup_{i\in I}B_i]$

בכיוון $\subseteq$: יהי $x\in f^{-1}[\bigcup_{i\in I}B_i]$. אזי $f(x)\in\bigcup_{i\in I}B_i$.

מכאן, קיים $i_0\in I$ כך ש- $f(x)\in B_{i_0}$

$$\Downarrow$$

$$x\in f^{-1}[B_{i_0}]\subseteq\bigcup_{i\in I}f^{-1}[B_i]$$

טענה:

$$f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i]=\bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$$

הוכחה:

מכיוון $\subseteq$: לכל $i\in I$ $\bigcap_{i\in I} B_i\subseteq B_i$

ולכן: $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i]\subseteq f^{-1}[B_i]$ $\forall i\in I$

לכן, $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i]\subseteq \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$

מכיוון $\supseteq$: יהי $x\in \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$, אז לכל $i\in I$ $x\in f^{-1}[B_i]$.

מכאן, לכל $i\in I$, $f(x)\in B_i$

לכן $f(x)\in \bigcap_{i\in I} B_i$. לפי ההגדרה, $x\in f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i]$.

טענה:

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i)=\bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. לא נכון בהכרח $f(\bigcap_{i\in I} A_i)=\bigcap_{i\in I} f(A_i)$ (יש הכלה של אגף שמאל באגף ימין תמיד)

הוכחה:

1. דומה להוכחת הטענה הקודמת.
2. דוגמה נגדית: $X=Y=\mathbb{R}$, $f:X\to Y$. f הפונקציה הקבועה $\forall x\in X\ f(x)=5$.

ניקח: $A_1=\{2\}, A_2=\{3\}$ $f(A_1\cap A_2)=\emptyset$

$f(A_1)\cap f(A_2)=5$

מרחבים מטריים

הגדרה:

תהי M קבוצה כלשהי ונניח שמוגדרת פונקציה $d: M\times M\to [0,\infty)$ (distance) המקיימת:

1. $x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0$ $\forall x,y\in M$
2. $d(x,y)=d(y,x)$ $\forall x,y\in M$
3. אי שוויון המשולש (אמ"ש) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ $\forall x,y,z\in M$

אזי (M,d) נקרא "מרחב מטרי" (מ"מ), ו-d נקראת "מטריקה" על M.

לפעמים כש-d ברורה מההקשר, נשמיט אותה ונאמר ש-M מ"מ.

תרגיל:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו ש-$d(a,b)=|f(a)-f(b)|$ מטריקה על $\mathbb{R}$ אם ורק אם f חח"ע.

הוכחה:

נוכיח רק את הכיוון $\Leftarrow$:

סימטריות ברורה. נוכיח את אי שוויון המשולש:

$$d(a,c)=|f(a)-f(c)| \le |f(a)-f(b)|+|f(b)-f(c)| = d(a,b)+d(a,c)$$

אי שוויון
המשולש עבור
ערך מוחלט

$$d(a,b)=0 \iff |f(a)-f(b)|=0 \iff f(a)=f(b) \iff a=b$$

כי f חח"ע $\rightarrow$

דוגמה:

הפונקציה $d(x,y)=|x^2-y^2|$ אינה מטריקה על $\mathbb{R}$ כי $f(x)=x^2$ לא חח"ע $d(1,-1)=0$.

מצד שני, $d(x,y)=|x^3-y^3|$ היא מטריקה על $\mathbb{R}$ כי $f(x)=x^3$ חח"ע.

הגדרה:

נגדיר את המטריקה הפ-אדית (p-adic) באופן הבא: עבור p ראשוני נגדיר:

מטריקה d_p על $\mathbb{Z}$ באופן הבא:

$$d_p(x,y)=\begin{cases} 0 & x=y \\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y \end{cases}$$

כאשר:

$$k(x,y)=\max\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\} \mid p^i \mid x-y\}$$

$$d_5(17,12)=\frac{1}{5}$$

תרגיל:

הוכיחו שהמטריקה הפ-אדית אכן מטריקה.

רמז: הראו כי $k(x,z)\ge\min\{k(x,y),k(y,z)\}$ והסיקו שמתקיים $d(x,z)\le\max\{d(x,y),d(y,z)\}$

הוכחה:

התכונה היחידה הלא טריוויאלית היא אי שוויון המשולש. אי שוויון המשולש טריוויאלי כאשר $x=y$ או $y=z$ או $x=z$.
לכן נניח ש- $x\neq y$ וגם $y\neq z$ וגם $x\neq z$

נסמן: $m=\min\{k(x,y),k(y,z)\}$.

$$\left.\begin{array}{l} m\le k(x,y)\Rightarrow p^m \mid (x-y) \\ m\le k(y,z)\Rightarrow p^m \mid (y-z) \end{array}\right\} \begin{array}{c} p^m \mid (x-z) \\ \Downarrow \\ m\le k(x,z) \end{array}$$

$$d(x,z)=\frac{1}{p^{k(x,z)}} \le \frac{1}{p^{\min\{k(x,y),k(y,z)\}}} = \max\left\{\frac{1}{p^{k(x,y)}}, \frac{1}{p^{k(y,z)}}\right\} = \max\{d(x,y),d(y,z)\} \le d(x,y)+d(x,z)$$

תרגיל:

יהי S אוסף כל הסדרות הממשיות.

תהי $d: S\times S \to [0,\infty)$ פונקציה המוגדרת ע"י

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$ כאשר $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots)$.

הראו ש-d מטריקה על S.

הוכחה:

נוכיח תחילה שהטור מתכנס $\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}\le\frac{1}{2^i}$

לכן ע"פ מבחן ההשוואה הראשון ~~...~~ להתכנסות הטור הגאומטרי $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$

נקבל שהטור שלנו מתכנס.

כל התכונות פרט לאי שוויון המשולש טריוויאליות. להוכחת אי שוויון המשולש נעזר בלמה הבאה:

למה: לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$ $$\frac{|a-c|}{1+|a-c|}\le\frac{|a-b|}{1+|a-b|}+\frac{|b-c|}{1+|b-c|}$$

הלמה אכן גוררת את אי שוויון המשולש עבור $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots)$, $z=(z_1,z_2,\dots)$

נציב $a=x_i$, $b=y_i$, $c=z_i$ ונקבל לכל $1\le i\le\infty$:

$$\frac{|x_i-z_i|}{1+|x_i-z_i|}\le\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}+\frac{|y_i-z_i|}{1+|y_i-z_i|}$$

ומכאן ממשיכים...

הוכחת הלמה:

בתחום $x\ge0$ הפונקציה $f(x)=\frac{x}{1+x}$ עולה $f(x)=\frac{1+x-1}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$

לכל $t,s,w\ge0$ המקיימים $s+w\ge t$ מתקיים:

$$f(t)\le f(s+w)=\frac{s+w}{1+s+w}=\frac{s}{1+s+w}+\frac{w}{1+s+w}\le\frac{s}{1+s}+\frac{w}{1+w}=f(s)+f(w)$$

עבור $a,b,c\in\mathbb{R}$ $|a-c|\le|a-b|+|b-c|$. לכן ניתן להציב בשלב הקודם $|a-c|=t$, $|a-b|=s$, $|b-c|=w$

ואז נקבל את הדרוש.

הגדרה:

יהי X מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. נגדיר פונקציה $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ המקיימת:

1. $\forall v\in X : \quad \|v\|=0 \iff v=0$
2. $\forall \alpha\in \mathbb{F},\ \forall v\in X \quad \|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$
3. א. שוויון המשולש $\forall x,y\in X \quad \|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

אזי $(X,\|\cdot\|)$ נקרא "מרחב נורמי", והפונקציה $\|\cdot\|$ נקראת "נורמה" על X.

במצב זה ניתן להגדיר מטריקה d על ידי $d(x,y)=\|x-y\|$.

תרגיל:

יהי $X=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n\in\mathbb{R}, \sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}<\infty\}$ אוסף כל הסדרות הממשיות החסומות.

הוכיחו כי הפונקציה $\|(x_n)\|=\sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$ היא נורמה על המרחב הזה (מרחב זה מסומן $\ell_\infty=(X,\|\cdot\|)$).

פתרון:

א. אם $x=(x_n)$ קל לראות שמתקיים: $\|x\|=0 \iff x=\vec{0}=(0,0,\dots)$

ב. $$\|(\alpha x_n)\| = \sup\{|\alpha x_n| \mid n\in\mathbb{N}\} =$$
$$= \sup\{|\alpha||x_n| \mid n\in\mathbb{N}\} = |\alpha|\sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$$

ג. צ"ל: $\|(x_n+y_n)\| \le \|(x_n)\| + \|(y_n)\|$

$$\forall m\in\mathbb{N}: \quad |x_m+y_m| \le |x_m|+|y_m| \le \sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\} + \sup\{|y_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$$

$$\sup\{|x_n+y_n| \mid n\in\mathbb{N}\} \le \sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\} + \sup\{|y_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$$

טופולוגיה - תרגול 2

4.3.14

הגדרה:

מרחב מטרי (M,d):

1. כדור פתוח ברדיוס r סביב a $B(a,r)=\{x\in M \mid d(x,a)<r\}$
2. כדור סגור ברדיוס r סביב a $B[a,r]=\{x\in M \mid d(x,a)\le r\}$

הגדרה:

יהי (M,d) מ"מ (מרחב מטרי) ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת נקודות ב- M.
נאמר שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת לנקודה $x\in M$ (ביחס למטריקה d) אם
לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$, $d(x_n,x)<\varepsilon$
(או באופן שקול: $x_n\in B(x,\varepsilon)$).

הערה:

$$x_n \xrightarrow{d} x \iff d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

תרגיל:

תהי d_3 המטריקה ה-3-אדית על $\mathbb{Z}$.

תזכורת: $d_3(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{3^{k(x,y)}} & x\ne y\end{cases}$ כאשר $k(x,y)=\max\{i \mid 3^i \mid x-y\}$.

א. תארו את $B_{d_3}[0,\frac{2}{5}]$, $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})$.

ב. יהי $x\in B_{d_3}(0,\varepsilon)$. הראו ש- $B_{d_3}(0,\varepsilon)=B_{d_3}(x,\varepsilon)$ (כלומר כל נקודה יכולה לשמש כמרכז הכדור).

ג. הוכיחו כי $2\cdot 3^n+5 \xrightarrow{d_3} 5$.

פתרון:

א. $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})=\{x\in\mathbb{Z} \mid d(x,0)<\frac{2}{5}\}$. המרחקים האפשריים במטריקה ה-3-אדית הם 0 או חזקות $\frac{1}{3}$.

נשים לב ש- $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<1$, ולכן $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})=B_{d_3}(0,1)$.

יהי $x\in B_{d_3}(0,1)$. אזי $x=0$ או $d(x,0)=\frac{1}{3^{k(x,0)}}<1$.

נניח $x\ne 0$. $\frac{1}{3^{k(x,0)}}<1 \iff \frac{1}{3^{k(x,0)}}<\frac{1}{3^0} \iff k(x,0)>0 \iff 3^1 \mid x-0 \iff x\in 3\mathbb{Z}$

אם $x=0$ אז גם מתקיים $x\in 3\mathbb{Z}$ ולכן כל נקודה שבכדור שלנו היא: $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})=3\mathbb{Z}$

$$B_{d_3}[0,\tfrac{2}{5}]=B_{d_3}(0,\tfrac{2}{5})=3\mathbb{Z}$$

(המשך בעמוד הבא...)

ב. נוכיח תחילה $B_{d_3}(x,\varepsilon) \subseteq B_{d_3}(0,\varepsilon)$.

יהי $y\in B_{d_3}(x,\varepsilon)$. אזי $d_3(x,y)<\varepsilon$. $x\in B_{d_3}(0,\varepsilon)$ ולכן $B_{d_3}(x,0)<\varepsilon$.

$$d_3(y,0)\le \max\{d_3(x,y),d_3(x,0)\}<\varepsilon$$

ולכן $y\in B_{d_3}(0,\varepsilon)$. הכלה הפוכה מוכיחים באופן דומה.

ג. $d_3(2\cdot3^n+5,5)=\frac{1}{3^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. מכאן $2\cdot3^n+5\xrightarrow{d_3}5$.

הגדרה: (סדרת קושי)

יהי (M,d) מ"מ ו-$\{x_n\}\subseteq M$ סדרה. נאמר שהיא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\ge n_0$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, אך ההיפך לא נכון בהכרח.

מרחב מטרי שבו כל סדרת קושי מתכנסת נקרא "מרחב שלם".

תרגיל:

תהי $\{e_n\}$ סדרה במרחב הנורמי ℓ_∞.

$e_1=(1,0,0,\dots)$
$e_2=(0,1,0,\dots)$
$e_n=(0,0,\dots0,\underset{\text{המקום ה-n}}{1},0,\dots)$

הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת למרות שהיא מתכנסת רכיב-רכיב.

פתרון:

כל נורמה משרה מטריקה ואנחנו נראה שהסדרה לא מתכנסת במטריקה הזו.

הסדרה מתכנסת רכיב-רכיב, כי בכל רכיב החל ממקום מסוים הוא 0.

הסדרה $\{e_n\}$ אינה קושי ולכן לא מתכנסת. לכל $m\ne n$ $d(e_n,e_m)=\|e_n-e_m\|=1$.

תרגיל:

תהי $x_n\xrightarrow{d_p}x$ (המטריקה ה-p-אדית) ויהי $c\in\mathbb{Z}$. אז $cx_n\xrightarrow{d_p}cx$.

הוכחה:

עבור $c=0$, הטענה טריוויאלית. לכן ניקח $c\ne0$. אם $c\ne0$, אזי קיים m מקסימלי כך ש-$p^m|c$.

נראה שלכל n מתקיים $\boxed{(*)\ d_p(cx_n,cx)=\frac{d_p(x_n,x)}{p^m}}$ ואז נקבל: $d_p(x_n,x)\to0 \Rightarrow \frac{d_p(x_n,x)}{p^m}\to0$

יהי n טבעי. אם $x_n=x$, נקבל $d_p(cx_n,cx)=d_p(x_n,x)=0$. אז (*) נכון באופן טריוויאלי.

אם $x_n\ne x$ אז גם $cx_n\ne cx$. מתקיים $cx_n-cx=c(x_n-x)$. מכיוון ש-m היא החזקה המקסימלית כך ש-$p^m|c$, נקבל: $k(cx_n,cx)=k(x_n,x)+m$.

מהצבה במרחק:

$$d_p(cx_n,cx)=\frac{1}{p^{k(cx_n,cx_n)}}=\frac{1}{p^{k(x_n,x)+m}}=\frac{d(x_n,x)}{p^m}$$

דוגמה למרחב לא שלם:

נראה שהמרחב $(\mathbb{Z}, d_5)$ אינו שלם.

לשם כך נמצא סדרת קושי לא מתכנסת. נתבונן ב- $x_n=5^1+5^2+\dots+5^n$.

נוכיח שהיא קושי: יהי $\varepsilon>0$. נבחר $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{5^{n_0+1}}<\varepsilon$.

נניח בה"כ $m\geq n\geq n_0$.

$$k(x_m,x_n)=\max\{i \mid 5^i \mid (x_m-x_n)\}$$

$$x_m-x_n=5^{n+1}+\dots+5^m$$

$$\Downarrow$$

$$k(x_n,x_m)=n+1$$

ולכן $d_5(x_n,x_m)=\frac{1}{5^{n+1}}\leq\frac{1}{5^{n_0+1}}<\varepsilon$

נוכיח שהסדרה לא מתכנסת ל- $x\in\mathbb{Z}$. נשים לב שמתקיים

$$x_n=\underbrace{\frac{5(5^n-1)}{5-1}}_{\text{סכום סדרה הנדסית}}=\frac{5^{n+1}-5}{4}$$

נניח בשלילה שמתקיים $x_n=\frac{5^{n+1}-5}{4}\xrightarrow{d_5}x$.

לפי התרגיל הקודם: $4x_n=5^{n+1}-5\xrightarrow{d_5}4x$, אבל $5^{n+1}-5\xrightarrow{d_5}-5$

מיחידות הגבול במ"מ, $4x=-5$, ולכן $x=-\frac{5}{4}\notin\mathbb{Z}$. קיבלנו סתירה.

לכן הסדרה לא מתכנסת.

תרגיל:

נגדיר שתי מטריקות על $C[0,1]$ (פונקציות רציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$) באופן הבא:

$$d_{max}(f,g)=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)-g(x)|$$

$$d(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$$

הראו כי $x^n\xrightarrow{d}0$ אבל $x^n\not\xrightarrow{d_{max}}0$.

פתרון:

מחד גיסא: $d(x^n,0)=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. לכן $x^n\xrightarrow{d}0$.

מצד שני, $d_{max}(x^n,0)=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$. לכן $x^n\not\xrightarrow{d_{max}}0$.

תרגיל:

מצאו מרחב מטרי (M,d) ושני כדורים שונים $B(a_2,r_2)$, $B(a_1,r_1)$ כאשר $r_1<r_2$ וגם $B(a_2,r_2)\subsetneq B(a_1,r_1)$. תארו את הכדורים.

פתרון:

נתבונן ב- $X=[0,\infty)$ כתת מרחב מטרי של $\mathbb{R}$. $B(3,4)=[0,7)\supsetneq B(1,5)=[0,6)$.

* במרחב נורמי אין דוגמה למקרה כזה.

תזכורת:

יהי (X,d) מ"מ. $A\subseteq X$ נקראת "קבוצה פתוחה" אם לכל $x\in A$ קיים $\varepsilon>0$

כך ש- $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq A$

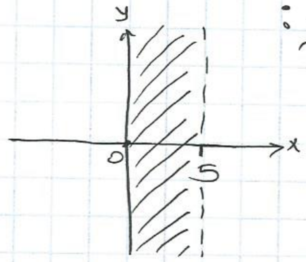
תרגיל:

האם הקבוצות הבאות פתוחות ב- $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית?

א. $\{(x,y) \mid 0\le x<5\}$

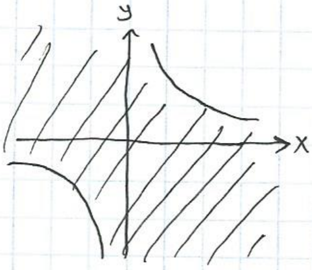
ב. $\{(x,y)\mid xy<1\}$

פתרון:



א. הקבוצה לא פתוחה!

(כל הנקודות על ציר ה- y אינן נקודות פנימיות).



ב. הקבוצה פתוחה.

שיכון איזומטרי:

הגדרה:

יהיו (X,d), (Y,ρ) מ"מ. פונקציה $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ נקראת "שיכון איזומטרי"

אם $\forall x,y\in X \quad d(x,y)=\rho(f(x),f(y))$.

אם בנוסף f על, נאמר ש- f "איזומטריה".

תרגיל:

הוכח/הפרך שקיים שיכון איזומטרי במקרים הבאים:

א. $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לכל $m\ge n$.

התשובה: קיים שיכון כזה. $f(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n,0,\dots 0)$.

ב. $[1,7]\to[8,10]$

התשובה: לא קיים שיכון כזה. נניח בשלילה שקיים שיכון איזומטרי f. נסמן: $x=f(1)$, $y=f(7)$.

אזי $6=|y-x|=|7-1|$, אבל אין שתי נקודות ב- $[8,10]$

שהמרחק ביניהן הוא 6.

המשך התרגיל בעמוד הבא...

(המשך התרגיל:)

ג. $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$

נניח (Y,ρ) , (X,d) מ"מ.

הראו שאם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ איזומטריה על, $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y$

הוכחה:

מכיוון ש- f איזומטריה, ההגדרה המרחקים נשמרים ולכן:

$$\sup\{d(x,y) \mid x,y\in A\} = \sup\{\rho(f(x),f(y)) \mid x,y\in A\} \overset{\text{כי } f \text{ על}}{=} \sup\{\rho(t,s) \mid t,s\in Y\}$$

ולכן נקבל את הדרוש.

ד. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $\operatorname{diam} X > \operatorname{diam} Y$ אז לא ניתן לשכן איזומטרית את X ב- Y.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיים שיכון איזומטרי. אז קיימת איזומטריה $f:(X,d)\to(f(X),\rho)$.

מסעיף ג' $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} f(X)$, אבל $\operatorname{diam} f(X) \le \operatorname{diam} Y$,

ולכן נקבל $\operatorname{diam} X \le \operatorname{diam} Y$ $\to$ וזו סתירה!

טופולוגיה - תרגול 3

11.3.14

הגדרה:

יהיו (X,d) , (Y,ρ) שני מ"מ. נאמר שפונקציה $f: X\to Y$:

א. רציפה בנקודה $a\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל X המקיים $d(x,a)<\delta$ מתקיים $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$.

כדור מסביב ל-a ברדיוס δ עם המטריקה d

במונחי כדורים: לכל $x\in B_d(a,\delta)$ מתקיים $f(x)\in B_\rho(f(a),\varepsilon)$.

או באופן שקול: $f(B_d(a,\delta))\subseteq B_\rho(f(a),\varepsilon)$

ב. רבמ"ש (רציפה במידה שווה) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ המקיימות $d(x,y)<\delta$ מתקיים $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$.

דוגמה:

כל פונקציה ליפש' היא רבמ"ש.

תזכורת: $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ נקראת "פונקציה ליפש'" אם קיים $k\geq 0$ רק ש- $\rho(f(x),f(y))\leq k\cdot d(x,y)$

דוגמאות לפונקציות ליפש':

א. לכל $1\leq i\leq n$, פונקציית ההטלה $P_i:(\mathbb{R}^n,d_{max})\to\mathbb{R}$

שהיא $P_i(x)=x_i$ כאשר $x=(x_1,\dots,x_n)$ היא ליפש'-1.

$$|P_i(x)-P_i(y)|=|x_i-y_i|\leq \max_{1\leq j\leq n}|x_j-y_j|=1\cdot d_{max}(x,y)$$

ב. יהי (X,d) מ"מ ו- $a\in X$. הפונקציה $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_a(x)=d(a,x)$ היא ליפש'-1.

$$|f_a(x)-f_a(y)|=|d(a,x)-d(a,y)|\overset{\text{מ"ש אחרונים}}{\leq} d(x,y)=1\cdot d(x,y)$$

תרגיל:

א. תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רבמ"ש. נניח $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי ב- (X,d) הוכיחו כי $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי ב- (Y,ρ) (כלומר: פונקציה רבמ"ש מעבירה סק"ק (סדרת קושי) לסק"ק).

ב. האם ניתן להחליף בסעיף א' את התנאי "רבמ"ש" ב"רציפה"?

פתרון:

א. יהי $\varepsilon>0$. $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רבמ"ש.

(*) לכן קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ המקיימים $d(x,y)<\delta$ מתקיים $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$

$\{x_n\}$ סק"ק לכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n\geq n_0$ $d(x_n,x_m)<\delta$. מ-(*) נקבל שלכל $m,n\geq n_0$, $\rho(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$.

ב. דוגמא נגדית: $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $Y=\mathbb{R}$. $f:X\to Y$ מוגדרת ע"י $f(x)=\frac{1}{x}$.

הסדרה $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ היא קושי. $\{f(\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}=\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אינה קושי. לכל $m\neq n$, $|n-m|\geq 1$.

משפט:

יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מ"מ. יהי $x\in X$. אזי התנאים הבאים שקולים:

א. f רציפה ב- x.

ב. $f(x_n)\xrightarrow{\rho} f(x) \Leftarrow x_n \xrightarrow{d} x$

טענה:

תהי $\{(x_n,y_n)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ ו- $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $(x_n,y_n)\xrightarrow{d_{max}}(x,y)$ אם ורק אם $x_n\to x$, $y_n\to y$

הוכחה:

נוכיח רק כיוון אחד. נניח $(x_n,y_n)\xrightarrow{d_{max}}(x,y)$ ההטלות $p_1,p_2:(\mathbb{R}^2,d_{max})\to\mathbb{R}$ רציפות, ובפרט רציפות ב- (x,y).

$(x_n,y_n)\xrightarrow{d_{max}}(x,y)$ ולכן לפי המשפט הנ"ל $x_n=p_1(x_n,y_n)\to p_1(x,y)=x$

באופן דומה, $y_n=p_2(x_n,y_n)\to p_2(x,y)=y$

הערה:

ניתן להוכיח את שני הכיוונים באמצעות אי-השוויונות

$$0\le |x_n-x|,|y_n-y| \le \max\{(x_n-x),(y_n-y)\} \le |x_n-x|+|y_n-y|$$

משפט:

יהי (X,d) מ"מ ויהי (A,d) תת מרחב שלו.

U פתוחה ב- (A,d) $\Leftrightarrow$ $U=V\cap A$ עבור V פתוחה ב- (X,d)

תרגיל:

יהי (A,d) תת מרחב של (X,d) ותהי $V\subseteq X$ קבוצה המקיימת $V\cap A$ פתוחה ב-(A,d).

האם V פתוחה ב- (X,d)?

תשובה:

לא בהכרח. דוגמה נגדית: $X=\mathbb{R}$, $A=(2,2\frac{1}{2}]$, $V=(2,3]$

$A\cap V=A$

V לא פתוחה ב- $\mathbb{R}$, A תמיד פתוחה ב- A.

הגדרה:

יהי M מ"מ. $S\subseteq M$ נקראת "סגורה" אם S^c פתוחה.

הערה:

סגורה $\neq$ לא פתוחה

$[2,3)$ לא פתוחה ולא סגורה.

תרגיל:

מצאו דוגמה לתת מרחב מטרי A של $\mathbb{R}$ שבו מתקיים:

כל קבוצה פתוחה ב-A היא פתוחה ב-$\mathbb{R}$. לא כל סגורה ב-A היא סגורה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון:

הערה: יש לשים לב שהתנאי הראשון מתקיים אם ורק אם A פתוחה ב-$\mathbb{R}$.

התנאי הכרחי - A פתוחה ב-A ולכן יש לדרוש ש-A תהיה פתוחה ב-$\mathbb{R}$.

התנאי מספיק - נניח ש-A פתוחה ב-$\mathbb{R}$. תהי U פתוחה ב-A. אזי קיימת V פתוחה ב-$\mathbb{R}$ כך ש-$U=A\cap V$. בסך הכל, U פתוחה ב-$\mathbb{R}$ כחיתוך סופי של פתוחות (ב-$\mathbb{R}$).

נמצא דוגמה שעבורה מתקיים גם התנאי של הסגירות.

$A=(2,3)$. A סגורה ב-A אבל אינה סגורה ב-$\mathbb{R}$ כי $A^c=(-\infty,2]\cup[3,\infty)$ לא פתוחה.

כמו כן, $B=(2,2\frac{1}{2}]$ לא סגורה ב-$\mathbb{R}$ אבל כן סגורה ב-A כי $A\setminus B=(2\frac{1}{2},3)$ פתוחה ב-A.

משפט:

יהיו X,Y מ"מ. $f:X\to Y$ רציפה אם ורק אם לכל U פתוחה ב-Y, $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

הערה: המשפט נכון גם עבור קבוצות סגורות.

הגדרה (מטריקות שקולות):

נאמר ששתי מטריקות על אותה קבוצה הן שקולות אם הן מגדירות את אותו האוסף של קבוצות פתוחות.

הגדרה שקולה: תהיינה ρ,d מטריקות על X.

ρ,d שקולות אם $x_n\xrightarrow{\rho}x \iff x_n\xrightarrow{d}x$

תרגיל:

תהיינה ρ,d שתי מטריקות על X. המטריקות ρ,d שקולות אם ורק אם

$$\left\{\begin{array}{l} Id:(X,d)\to(X,\rho) \\ Id:(X,\rho)\to(X,d) \end{array}\right. \text{(רציפות)}$$

הוכחה בעמוד הבא...

הוכחה:

נניח ש- ρ, d שקולות לפי ההגדרה הראשונה ונוכיח שהזהות רציפה. נוכיח רק לצד:

$$Id: (X,d) \to (X,\rho)$$

תהי U פתוחה ב- (X,ρ).

$$Id^{-1}(U) = \{x \in X \mid Id(x) \in U\} = \{x \in X \mid x \in U\} = U$$

U פתוחה ב- (X,d) על פי ההנחה. לכן על פי המשפט הקודם, הזהות הנ"ל רציפה.

תרגיל:

הוכיחו שבכל מ"מ, כל כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

פתרון:

יהי (X,d) מ"מ, $B[a,r]$ כדור סגור. נראה ש- $(B[a,r])^c$ פתוחה.

יהי $x \in (B[a,r])^c$. עלינו למצוא $\varepsilon > 0$ כך ש- $x \in (B,\varepsilon) \subseteq (B[a,r])^c$

$x \in (B[a,r])^c$ ולכן $d(x,a) > r$. יהי $\varepsilon = d(x,a) - r > 0$. נוכיח ש- $B(x,\varepsilon) \subseteq (B[a,r])^c$

יהי $y \in B(x,\varepsilon)$. אז: $d(x,y) < \varepsilon = d(x,a) - r$ מכאן,

א' שוויון המשולש בהעברת אגפים $\Leftarrow$ $r < d(x,a) - d(x,y) \le d(y,a)$

מכאן, $y \in (B[a,r])^c$.

דרך נוספת להוכחה: $B[a,r] = f_a^{-1}[0,r]$

קבוצות פתוחות/סגורות דרך פונקציות רציפות:

תרגיל:

תהי $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}$ תת קבוצה של $\mathbb{R}^2$. הוכיחו ש- D פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$.

פתרון:

נתבונן בפונקציה $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x,y) = xy$.

זוהי מכפלה של הטלות רציפות, ולכן רציפה.

$$D = \{(x,y) \mid xy < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < 1\} = f^{-1}[(-\infty,1)]$$

f רציפה ו- $(-\infty,1)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$, ולכן D פתוחה.

* בתרגול הבא נוכיח את הטענה הבאה:

כל קבוצה סגורה היא קבוצת G-δ (כלומר, היא ניתנת להצגה כחיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות).

טופולוגיה - תרגול 4

18.3.14

טענה:

במ"מ, חיתוך סופי של קבוצות פתוחות ואיחוד כלשהו של קבוצות פתוחות פתוח.

הוכחה:

יהי (X,d). נתחיל מאיחוד: נניח שלכל $i\in I$ O_i פתוחה ב- X.

נראה ש- $\bigcup_{i\in I} O_i$ פתוחה: יהי $x\in \bigcup_{i\in I} O_i$. אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שמתקיים

$$x\in B(x,\varepsilon)\subseteq O_{i_0}\subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$$

חיתוך סופי:

נניח O_1,O_2 פתוחות ונוכיח ש- $O_1\cap O_2$ פתוחה.

יהי $x\in O_1\cap O_2$. אז $\underset{\text{פתוחה}}{x\in O_1}$ וגם $\underset{\text{פתוחה}}{x\in O_2}$. אזי קיימים $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ כך ש:

$$x\in B(x,\varepsilon_1)\subseteq O_1$$
$$x\in B(x,\varepsilon_2)\subseteq O_2$$

יהי $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)>0$. נקבל ש- $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq B(x,\varepsilon_1)\cap B(x,\varepsilon_2)\subseteq O_1\cap O_2$

תרגיל:

יהי M מ"מ. תהי $A\subseteq M$ סגורה. הוכיחו שאם $x\notin A$ אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $B(x,\frac{1}{n})\cap A=\emptyset$

פתרון:

יהי $\underset{\text{סגורה}}{x\notin A}$. אזי $x\in A^c$ (A^c פתוחה). אזי קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq A^c$.

קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n}<\varepsilon$ ולכן $B(x,\frac{1}{n})\subseteq B(x,\varepsilon)\subseteq A^c$. מכאן, $B(x,\frac{1}{n})\cap A=\emptyset$.

תרגיל:

הוכיחו שבמ"מ, כל קבוצה סגורה היא G_δ (חיתוך בן מניה של פתוחות).

הוכחה:

יהי (X,d) מ"מ, $A\subseteq X$ סגורה. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $O_n=\bigcup_{a\in A}B(a,\frac{1}{n})$.

O_n פתוחה לכל n כאיחוד של פתוחות (כדורים פתוחים). נראה ש- $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

בכיוון $\subseteq$: קל לראות שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $A\subseteq O_n$ ולכן $A\subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$

בכיוון $\supseteq$: נניח ש- $x\notin A$ ונראה ש- $x\notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. על פי התרגיל הקודם, קיים $n\in\mathbb{N}$

כך ש- $B(x,\frac{1}{n})\cap A=\emptyset$. מכאן, לכל $a\in A$ מתקיים $a\notin B(x,\frac{1}{n})$.

לכן לכל $a\in A$, $x\notin B(a,\frac{1}{n})$. מכאן, $x\notin \bigcup_{a\in A}B(a,\frac{1}{n})=O_n$ ולכן $x\notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

משפט:

יהי (X,d) מ"מ.

$A\subseteq X$ סגורה $\iff$ לכל סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ כך ש- $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ מתקיים $x\in A$.

(כלומר, קבוצה סגורה מכילה את כל נקודות הגבול שלה).

תרגיל:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר את הגרף של f:

$$Gr_f := \{(x,y) \mid y=f(x)\}\subseteq \mathbb{R}^2$$

הוכיחו כי Gr_f הינו תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}^2$ לכל פונקציה רציפה f.

פתרון:

תהי $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq Gr_f$ סדרה שגבולה $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ונוכיח ש- $(x,y)\in Gr_f$.

$(x_n,y_n)\to(x,y)$ ולכן $\begin{cases}x_n\to x\\ y_n\to y\end{cases}$. f רציפה, $x_n\to x$ ולכן $f(x_n)\to f(x)$.

$\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq Gr_f$ ולכן $y_n=f(x_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

מכאן, $y_n\to y$, $y_n\to f(x)$ ומיחידות הגבול במ"מ, $y=f(x)$. לכן $(x,y)\in Gr_f$.

נקודות הצטברות

הגדרה:

1. יהי (X,d) מ"מ ותהי $A\subseteq X$. נקודה $a\in X$ תיקרא "נקודת הצטברות" של A אם לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $(B(a,\varepsilon)\setminus\{a\})\cap A\neq\emptyset$.

   כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\neq x\in A$ כך ש- $x\in B(a,\varepsilon)$

   (שקול: לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A$ כך ש- $0<d(x,a)<\varepsilon$)

2. קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A\setminus\{a\}$ המתכנסת ל- a.
3. קיימת סדרה של איברים שונים $\{x_n\}\subseteq A$ המתכנסת ל- a.

תנאים שקולים

הערה:

נקודת הצטברות של A אינה בהכרח שייכת ל- a.

סימון:

נסמן ב- A' את אוסף נקודות ההצטברות של A.

טענה: (הוכחה בש"ב)

A סגורה $\iff$ $A'\subseteq A$

תרגיל:

יהי (M,d) מ"מ. הוכיחו $A''\subseteq A'$

(מסקנה מהתרגיל: לכל $A\subseteq(X,d)$ קבוצת נקודות ההצטברות של A (A') סגורה, שכן $(A')'\subseteq A'$)

פתרון:

יהי $x\in A''$ ונוכיח ש- $x\in A'$. צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיימת נקודה $y\in A$ כך ש- $0<d(x,y)<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$. $x\in A''$, ולכן קיימת נקודה $z\in A'$ כך ש- $0<d(x,z)<\frac{\varepsilon}{2}$.

$z\in A'$ ולכן היא נקודת הצטברות של A. לכן עבור $d(x,z)$ (בתפקיד אפסילון)

קיימת נקודה $y\in A$ כך ש- $0<d(y,z)<d(x,z)$ (*)

$$d(x,y)\overset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le} d(x,z)+d(y,z)<2d(x,z)<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$x\neq y$ לפי (*) ולכן בסך הכל, $0<d(x,y)<\varepsilon$.

תרגיל:

הוכיחו שלתת קבוצה סופית במ"מ אין נקודות הצטברות.

הוכחה:

תהי A קבוצה סופית, ונניח בשלילה ש- $A'\neq\emptyset$. אזי קיימת נקודת הצטברות של A שנסמנה a. אזי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל- a.

$$|\{x_n\}|=\aleph_0$$

מצד שני, $\{x_n\}\subseteq\underset{\text{סופית}}{A}$ ולכן $|\{x_n\}|<\aleph_0$.

תרגיל:

הוכיחו כי ל- $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ אין נקודות הצטברות, והסיקו שהיא קבוצה סגורה.

פתרון:

אחרי שנוכיח ש- $\mathbb{Z}'=\emptyset$, נקבל $\mathbb{Z}'\subseteq\mathbb{Z}$ ולכן $\mathbb{Z}$ סגורה.

סדרת קושי ↑

נניח ש- $\mathbb{Z}\supseteq\{x_n\}\to x\in\mathbb{R}$ ונראה שהסדרה $\{x_n\}$ קבועה לבסוף. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ולכן קושי.
מצד שני, לכל $x_n\neq x_m$ מתקיים $d(x_n,x_m)\ge 1$. לכן בהכרח $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.
נראה כעת של- $\mathbb{Z}$ אין נקודות הצטברות. תהי a נקודת הצטברות של $\mathbb{Z}$.

אזי קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq\mathbb{Z}\setminus\{a\}$ המתכנסת ל- a, ומצד שני, $x_n=a$ לבסוף. אזי סתירה.

תרגיל:

הוכיחו כי כל תת קבוצה לא ריקה בת מניה ב- $\mathbb{R}$ אינה פתוחה.

פתרון:

נניח בשלילה שקיימת $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- $|A|\le\aleph_0$ וגם A פתוחה. $A\neq\emptyset$ ולכן קיימת נקודה $a\in A$. A פתוחה ולכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $a\in B(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subseteq A$.

לכן $|A|\ge|(a-\varepsilon,a+\varepsilon)|=\aleph$ בסתירה להנחה ש- $|A|\le\aleph_0$.

הגדרה:

א. נאמר כי שתי מטריקות ρ ו-d על אותה קבוצה X שקולות במובן ליפש.ץ אם קיימים קבועים חיוביים α,β כך ש- $\alpha\rho(x,y)\le d(x,y)\le\beta\rho(x,y)$ $\forall x,y\in X$

ב. נאמר ששתי נורמות $\|\,\|_1, \|\,\|_2$ על אותו מרחב וקטורי X שקולות אם קיימים קבועים חיוביים α,β כך ש:

$$\forall v\in X \quad \alpha\|v\|_2 \le \|v\|_1 \le \beta\|v\|_2$$

הערות:

1. קל לראות שנורמות שקולות משרות מטריקות שקולות במובן ליפש.ץ.
2. מטריקות שקולות במובן ליפש.ץ הן בהכרח שקולות במובן הרגיל (שקילות טופולוגית).

הסבר: משפט הסנדוויץ' + אי השוויונות $0\le\alpha\rho(x_n,x)\le d(x_n,x)\le\beta\rho(x_n,x)$

תרגיל:

נניח ש- d_1,d_2 שקולות במובן ליפש.ץ על X. הוכיחו ש- (X,d_1) שלם אם ורק אם (X,d_2) שלם.

הוכחה:

מספיק להוכיח שאם (X,d_1) שלם אז גם (X,d_2) שלם.

תהי $\{x_n\}$ ס"ק ב-(X,d_2). מכיוון שהמטריקות שקולות במובן ליפש.ץ קל לראות ש:

$Id:(X,d_2)\to(X,d_1)$ — פונקציה ליפש.ץ.

Id היא פונקציה ליפש.ץ ולכן רמ"ש. לכן $\{x_n\}$ ס"ק גם ב- (X,d_1).

(X,d_1) שלם ולכן קיימת $x\in X$ כך ש- $x_n\xrightarrow{d_1}x$.

המטריקות שקולות ליפש.ץ ולכן שקולות טופולוגית, ומכאן $x_n\xrightarrow{d_2}x$.

קבוצת קנטור:

נתבונן בקטע $I=[0,1]$. נוציא ממנו את השליש האמצעי הפתוח $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ונקבל את הקבוצה $C_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. ב- C_1 יש 2^1 קטעים שאורך כל אחד מהם הוא $(\frac{1}{3})^1$.

כך נמשיך באינדוקציה בכל שלב להוריד את השליש האמצעי הפתוח לכל אחד מהקטעים שנותרו ונקבל את הקבוצה C_n שבה 2^n קטעים סגורים שאורך כל אחד מהם הוא $(\frac{1}{3})^n$.

לכל n, C_n סגורה כאיחוד סופי של קטעים סגורים שהם קבוצות סגורות ב- $\mathbb{R}$.

נגדיר את קבוצת קנטור C להיות $C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n$.

C סגורה כחיתוך של סגורות.

המשך בעמוד הבא...

המשך: קבוצת קנטור:

מהי עוצמת קבוצת קנטור?

נראה שהיא $\aleph$.

הרעיון: לכל $x\in[0,1]$ יש הצגה טרנרית $X=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\dots$ כאשר $a_i\in\{0,1,2\}$

מציאת a_1 - מסתכלים באיזה שליש x נמצא $[0,\frac{1}{3}]\cup(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cup[\frac{2}{3},1]$.

אם בשמאלי נותנים את הערך 0, באמצעי 1 ובימני 2 ו

וכן הלאה וכן הלאה

$x\in C \iff$ קיימת הצגה $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$ כאשר $\forall i\in\mathbb{N},\ a_i\in\{0,2\}$

נשים לב ש- $C\subseteq[0,1]$ ולכן $|C|\le\aleph$.

מצד שני ניתן להתאים פונקציה $f: C\to[0,1]$ באופן הבא:

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_i}{2}\right)}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{1+i}}$$

קל לראות שזו פונקציה על, ולכן $|C|\ge|[0,1]|\ge\aleph$.

$$\Downarrow$$

$$|C|=\aleph$$

25.3.14

טופולוגיה - תרגול 5

הגדרה: מרחב טופולוגי (מ"ט) הוא זוג (X,τ) כך ש:

X קב' כלשהי ו- τ אוסף של תתי-קבוצות של X ($\tau\subseteq P(X)$) המקיים:

1) $\emptyset, X\in\tau$

2) בהינתן אוסף כלשהו $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קב' השייכות ל-τ

מתקיים $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\in\tau$.

3) אם $U_1,U_2\in\tau$ אז $U_1\cap U_2\in\tau$.

במצב זה τ נקראת טופולוגיה על X ואברי τ הם הקבוצות הפתוחות ב-X.

הגדרה: יהי (X,τ) מ"ט.

$A\subseteq X$ סגורה אם A^c פתוחה ($A^c\in\tau$).

הגדרה: הטופולוגיה הקו-סופית (co-finite) על הקב' X.

$$\tau_{cof}=\{U\subseteq X : |U^c|<\infty\}\cup\{\emptyset\}.$$

* באופן שקול, $A\subseteq X$ סגורה ב (X,τ_{cof}) $\Leftarrow$ A סופית או $X=A$.

תרגיל: הוכיחו τ_{cof} היא טופולוגיה.

פתרון: נוכיח את התכונות האנלוגיות לסגורות.

1) $\emptyset, X$ סגורות. X מ-*: $\emptyset$ סגורה שכן היא סופית.

2) נניח שלכל $i\in I$, U_i סגורה ב-(X,τ_{cof}),

ונוכיח ש $\bigcap_{i\in I}U_i$ סגורה.

מקרה ראשון: $U_i=X$ לכל $i\in I$. נקבל $\bigcap_{i\in I}U_i=X$ סגורה.

מקרה שני: קיים $i_0\in I$ כך ש $U_{i_0}\neq X$. U_{i_0} סגורה ושונה מ-X ולכן U_{i_0} סופית.

$\left|\bigcap_{i\in I}U_i\right|\le|U_{i_0}|<\infty$ ולכן $\bigcap U_i$ סגורה.

3) יהיו V_1,V_2 סגורות ונוכיח ש $V_1\cup V_2$ סגורה.

מקרה I: $V_1=X$ או $V_2=X$. נקבל $V_1\cup V_2=X$ סגורה.

מקרה II: $V_1\neq X$ וגם $V_2\neq X$ ולכן V_1,V_2 סופיות, ומכאן $V_1\cup V_2$ סופית.

מכאן [illegible] סגורה.

הקדמה להוכחה שיש אינסוף מס' ראשוניים:

יהיו $a\in\mathbb{Z}$, $d\in\mathbb{N}$, נגדיר סדרה חשבונית דו צדדית

$$S = a+d\mathbb{Z} = \{a+dk : k\in\mathbb{Z}\}.$$

נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הבאה:

$O\in T \iff$ לכל $x\in O$ קיימת סדרה חשבונית דו צדדית $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש $x\in S\subseteq O$.

<u>הערה</u>: היינו לכאורה יכולים להגדיר משהו יותר כללי:

$O\in T \iff$ לכל $x\in O$ קיים $S=a+d\mathbb{Z}$ כך ש $x\in S\subseteq O$.

בפועל ההבדל מדומה.

אם $x\in a+d\mathbb{Z}$ אז $x=a+dk$ עבור $k\in\mathbb{Z}$ ואז

$$\underline{a+d\mathbb{Z}} = (x-dk)+d\mathbb{Z} = \underline{x+d\mathbb{Z}}.$$

<u>טענה 1</u>: T היא טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.

① $\emptyset\in T$ באופן ריק.

$\mathbb{Z}\in T$ כי לכל $x\in\mathbb{Z}$ מתקיים $x\in x+1\cdot\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$.

② נניח ש $O_i\in T$ לכל $i\in I$ ונראה ש $\bigcup_{i\in I}O_i\in T$.

יהי $x\in\bigcup_{i\in I}O_i$. אזי קיים $i_0\in I$ כך ש $x\in O_{i_0}$ ו- $O_{i_0}\in T$.

לכן, קיים $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש $x\in S\subseteq O_{i_0}\subseteq\bigcup O_i$.

③ יהיו $O_1,O_2\in T$ ונוכיח $O_1\cap O_2\in T$.

יהי $x\in O_1\cap O_2$. אזי $x\in O_1\in T$, $x\in O_2\in T$.

לכן קיימות סדרות חשבוניות דו"צ $S_1=x+d_1\mathbb{Z}$, $S_2=x+d_2\mathbb{Z}$

כך ש $x\in x+d_1\mathbb{Z}\subseteq O_1$ יהי $S_3=x+d_1d_2\mathbb{Z}$.

$x\in x+d_2\mathbb{Z}\subseteq O_2$.

נראה ש $S_3\subseteq S_1\cap S_2$, ואז $x\in S_3\subseteq S_1\cap S_2\subseteq O_1\cap O_2$.

נוכיח רק ש $S_3\subseteq S_1$. באופן דומה מוכיחים $S_3\subseteq S_2$.

יהי $y\in S_3=x+d_1d_2\mathbb{Z}$. אזי קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש

$$y=x+d_1d_2k=x+d_1(d_2k)\in x+d_1\mathbb{Z}.$$

טענה 2: כל סדרה חשבונית $S = a+d\mathbb{Z}$ היא פתוחה.

הוכחה: אם $x \in a+d\mathbb{Z}=S$ מתקיים $x \in S \subseteq S$. (שימו לב לבחירה מקומית על שקילות ההגדרה).

טענה 3: $a+d\mathbb{Z}$ סגורה.

הוכחה: נראה ש $(a+d\mathbb{Z})^c$ פתוחה.

אלגברית, ניתן להגדיר יחס שקילות $a\sim b \Leftrightarrow a\equiv b \pmod d$.

מהן מחלקות השקילות? $[a] = a+d\mathbb{Z}$.

נניח $k = a \bmod d$, כאשר $0 \le k \le d-1$.

בפועל, מתקיים $(a+d\mathbb{Z})^c = \bigcup_{b\in\{0,\dots,d-1\}\setminus\{k\}} (b+d\mathbb{Z})$.

ולכן היא פתוחה כאיחוד פתוחות.

הגדרה: (מ"ט מטריזבילי)

יהי (X,τ) מ"ט. נאמר ש (X,τ) מטריזבילי אם קיימת d על X המשרה את τ. (כלומר: מגדירה את אותו האוסף של פתוחות).

דוגמה: לכל קבוצה X קיימת טופולוגיה τ שנקראת הטופולוגיה הדיסקרטית $\tau = P(X)$.

(X,τ) במקרה זה נקרא מ"ט דיסקרטי.

(X,τ) מטריזבילי ע"י מטריקת 0-1 $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y \end{cases}$.

נראה שכל נקודה $\{x\}$ פתוחה ב-(X,d) ולכן נסיק $\tau_{disc} = \tau_d$.

$\{x\} = B(x,\frac{1}{2})$.

דוגמה נגדית (מרחב Sierpinski):

יהי $X=\{a,b\}$, $\tau = \{\phi,\{a\},X\}$. קל לבדוק ש(X,τ) מ"ט.

האם מטריזבילי? לא! נשים לב שאם היה כן מטריזבילי אזי כל נקודון סגור,

ובפרט $\{a\}$ צריכה להיות סגורה ב (X,τ). אבל $\{a\}^c = \{b\} \notin \tau$.

<u>הגדרה:</u> יהי (X,τ) מ"ט.

נאמר שסדרה $\{x_n\}\subseteq X$ מתכנסת ל $x\in X$,

אם $\boxed{\text{לכל}}$ סביבה פתוחה U של x $(x\in U\in\tau)$

קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$: $x_n\in U$.

<u>דוגמה נוספת למרחב לא מטריזבילי:</u>

תהי $p\notin\mathbb{R}$ ונסמן $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$.

נגדיר $\tau=\{O\subseteq X: p\notin O \vee |O^c|\leq\aleph_0\}$.

הוכיחו בבית (X,τ) הוא אכן מ"ט.

נוכיח ש (X,τ) לא מטריזבילי. (באמת? איך???).

<u>פתרון ראשון:</u>

1. נאפיין את הסדרות המתכנסות במרחב (X,τ)

תהי $\{x_n\}\subseteq X$ המתכנסת ל- $x\in X$

תהי $$U=\left(X\setminus\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\cup\{x\}$$

מתקיים $x\in U$ וכמו כן $|U^c|\leq\aleph_0$ ולכן $U\in\tau \Longrightarrow U$ סביבה פתוחה של x.

$x_n\xrightarrow{\tau}x$. ולכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$,

$x_n\in U=(X\setminus\{x_n\})\cup\{x\}$.

מהכרח x_n קבועה לבסוף. כלומר, קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n=x$.

מצד שני, אם $x_n=x$ לבסוף, קל לראות ש $x_n\xrightarrow{\tau}x$.

<u>סיכום ביניים:</u> הסדרות המתכנסות הן הקבועות לבסוף.

<u>הערה:</u> ~~אם (X,d) מ"מ והסדרה~~

עבור מטריקה d_{0-1} מתקיים $x_n=x$ לבסוף $\Longleftrightarrow x_n\xrightarrow{d_{0-1}}x$.

נניח בשלילה ש (X,τ) מטריזבילי.

אז לפי ההערה הנ"ל הוא מטריזבילי ע"י מטריקה d ששקולה למטריקה $d_{\text{דיס}}$.

כלומר, מטריזבילי ע"י $d_{\text{דיס}}$.

מצד שני, $d_{\text{דיס}}$ משרה את הטופולוגיה הדיסקרטית. כלומר בסה"כ, $\tau=P(X)$.

נראה ש $\tau\neq P(X)$ ע"י שנמצא תת קב' של X שאינה פתוחה.

$\{p\}\subseteq X$ ומתקיים $|\{p\}^c|=|\mathbb{R}|>\aleph_0$. מכאן $\{p\}\notin\sigma$ ולכן $\{p\}\notin\tau$.

בסתירה.

שורה תחתונה:

בניגוד למרחבים מטריזביליים, התכנסות סדרות קובעת בצורה יחידה את הטופולוגיה. במקרה הכללי המצב אינו כזה.

טענה: תהיינה $\tau\subsetneq\sigma$ טופולוגיות על X.

קל לראות (בקלות) שאם $x_n\xrightarrow{\tau}x$ אזי $x_n\xrightarrow{\sigma}x$.

הגדרה: הישר של Sorgenfrey.

נתבונן ב $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה T הבאה:

קב' היא פתוחה אם היא איחוד של קב' מהצורה $[a,b)$.

ד
↓
5
ש"ב

הערה: בש"ב נוכיח שהטופולוגיה הנ"ל אכן טופולוגיה והיא מכילה את הטופולוגיה הסטנדרטית (האוקלידית) של $\mathbb{R}$.

תרגיל: הוכיחו שהסדרה $\{-\frac{1}{n}\}$ אינה מתכנסת בישר של סורגנפריי.

פתרון: נניח בשלילה שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $-\frac{1}{n}\xrightarrow{T}x$.

עפ"י ההערה הנ"ל נקבל ש $-\frac{1}{n}\to x$ גם בטופולוגיה האוקלידית של $\mathbb{R}$ ונקבל בהכרח $x=0$.

אבל $-\frac{1}{n}\not\xrightarrow{T}0$ שכן עבור הסביבה $[0,1)$ של 0 מתקיים שלכל $n\in\mathbb{N}$, $-\frac{1}{n}\notin[0,1)$. בסתירה!

טופולוגיה - תרגול 6

1.4.14

הגדרה (סגור במ"ט):

יהי X מ"ט. תהי $A\subseteq X$. הסגור של A ב-X הוא:

$$cl(A)=\bar{A}=\bigcap_{\substack{A\subseteq S \\ \text{סגורה}}} S$$

(הסגור של A היא הסגורה המינימלית המכילה את A)

אפיון נוסף של הסגור: $p\in cl(A) \iff$ לכל סביבה U של p מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$.

הגדרה:

יהי X מ"ט. $A\subseteq X$ הסגור הסדרתי של A הוא:

$$scl(A)=\{p\in X \mid \exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A,\ x_n\xrightarrow{\tau}p\}$$

תרגיל:

יהי (X,d) מ"מ. תהי $A\subseteq X$ קבוצה כלשהי. הראו שמתקיים:

$p\in cl(A) \iff$ קיימת סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ כך ש- $x_n\to p$ (או $p\in scl(A)$)

הוכחה:

כיוון $\Rightarrow$: כיוון זה נכון בכל מ"ט ובפרט במ"מ. כלומר, בכל מ"ט מתקיים $scl(A)\subseteq cl(A)$.

נניח $p\in scl(A)$ ונראה ש- $p\in cl(A)$. תהי U סביבה של p.

$p\in scl(A)$ ולכן קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A \to p$. לכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n\in U$.

בפרט, $x_{n_0}\in U$. $\{x_n\}\subseteq A$ ולכן $x_{n_0}\in A$ ובסה"כ $x_{n_0}\in U\cap A\neq\emptyset$.

כיוון $\Leftarrow$: לא נכון בהכרח בכל מ"ט. נראה שהוא נכון במ"מ.

תהי $p\in cl(A)$. לכן $\forall n\in\mathbb{N}\ \ B(p,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ יהי $x_n\in B(p,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$.

מתקיים $\{x_n\}\subseteq A$ וכן $0\leq d(x_n,p)\leq\frac{1}{n}$. נראה ש- $x_n\to p$ לפי משפט הסנדוויץ'.

הגדרה:

מרחבים טופולוגיים שבהם מתקיים $cl(A)=scl(A)$ לכל A נקראים Frechet-Urysohn.

על פי הנ"ל, כל מ"מ הוא כזה.

הגדרה:

יהי X מ"ט ותהי $A\subseteq X$. נגדיר את הפנים של A: $int(A)=\bigcup_{\substack{U\subseteq A \\ \text{פתוחה}}} U$

$int(A)$ היא הפתוחה המקסימלית המוכלת ב-A.

אפיון נוסף: $x\in int(A) \iff$ קיימת U פתוחה כך ש- $x\in U\subseteq A$ (כלומר A סביבה של x)

הגדרה:

יהי X מ"ט, $A\subseteq X$. השפה של A היא:

$$\partial(A) = cl(A)\setminus int(A) = cl(A)\cap cl(A^c)$$

תרגיל:

מצאו סגור ופנים של הקבוצה הבאה:

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0,\ y\neq 0\}$$

פתרון:

ניחוש מושכל: $int(A)=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y\neq 0\}}_{B}$

נוכיח על ידי הכלה דו-כיוונית:

בכיוון $\supseteq$: $A\supseteq B$. נראה ש- B פתוחה ונקבל $int(A)\supseteq B$.

$$B=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}}_{C} \cap \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0\}}_{D}$$

נראה ש- C,D פתוחות ולכן B פתוחה כחיתוך סופי של פתוחות

נראה רק לגבי C. נתבונן בפונקציית ההטלה על הרכיב הראשון:

$$p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad,\quad p_1(x,y)=x$$

$$C=\{(x,y)\mid p_1(x,y)>0\}=p_1^{-1}[(0,\infty)]$$

p_1 רציפה, $(0,\infty)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ולכן $C=p_1^{-1}[(0,\infty)]$ פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$.

$D=\underbrace{p_2^{-1}}_{\text{רציפה}}(\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{פתוחה ב-}\mathbb{R}})$ ולכן D פתוח.

בכיוון $\subseteq$: נוכיח ש- $int(A)\subseteq B$ נשים לב ש- $int(A), B\subseteq A$.

לכן מספיק להוכיח $A\setminus B\subseteq A\setminus int(A)$. תהי $(x,y)\in A\setminus B$, אז בהכרח $x=0$

נניח בשלילה ש- $(0,y)\in int(A)$. אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $(0,y)\in B((0,y),\varepsilon)\subseteq A$

אבל $(-\frac{\varepsilon}{2},y)\in B((0,y),\varepsilon)\setminus A$ וזו סתירה.

המשך הפתרון בעמוד הבא...

המשך:

נימוק מושג: $cl(A)=\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}}_{=F}$ * סימון - p_i - ההטלה על הרכיב ה-i

הוכחה:

$\subseteq$: בכיוון $A\subseteq F$. נראה ש-F סגורה ולכן $cl(A)\subseteq F$

$$F=\underbrace{p_1^{-1}}_{\text{רציפה}}[\underbrace{[0,\infty)}_{\text{סגורה ב-}\mathbb{R}}]$$

מכאן, F סגורה.

$\supseteq$: בכיוון נראה ש- $F\subseteq scl(A)$ ומכאן $F\subseteq cl(A)$

תמיד מתקיים $A\subseteq scl(A)\subseteq cl(A)$. לכן מספיק להוכיח ש- $F\setminus A\subseteq scl(A)$.

תהי $(x,y)\in F\setminus A$. אז $y=0$. $\{(x,\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ $\to$ $(x,y)=(x,0)$.

מכאן $(x,y)\in scl(A)\subseteq cl(A)$

הגדרה:

יהי X מ"ט ותהי $A\subseteq X$. נאמר ש-A צפופה ב-X אם $cl(A)=X$.

טענה:

A צפופה אם ורק אם לכל $U\subseteq X$ פתוחה ולא ריקה מתקיים $A\cap U\neq\emptyset$

תרגיל:

יהי $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ מ"ט. $\tau_{cof}=\{\emptyset\}\cup\{U\subseteq\mathbb{R} : |U^c|<\infty\}$ cof = co-final

הוכיחו: א. לכל $A\in\mathbb{R}$ מתקיים A פתוחה או A בעלת פנים ריק.

ב. כל קבוצה אינסופית צפופה ב-$\mathbb{R}$.

הוכחה:

א. אם $int(A)=\emptyset$ סיימנו. נניח ש- $int(A)\neq\emptyset$ ונראה ש-A פתוחה. נסמן $B=int(A)$.

אז B פתוחה המקיימת $\emptyset\neq B\subseteq A$. נקבל: $A^c\supseteq B^c\neq\mathbb{R}$.

B^c סגורה ושונה מ-$\mathbb{R}$ ולכן היא סופית. $A^c\subseteq B^c$ ולכן גם A^c סופית ומכאן A פתוחה.

ב. תהי $F\subseteq\mathbb{R}$. נרצה להראות כי $cl(F)=\mathbb{R}$. נבחן את הסגורות המכילות את F.

תהי G סגורה כך ש- $F\subseteq G$. בטופולוגיה הקו-סופית, הסגורות הן סופיות או המרחב כולו.

אבל G אינסופית (נחשוב למה) ולכן $G=\mathbb{R}$.

כלומר, קיימת סגורה אחת המכילה את F והיא $\mathbb{R}$. מכאן $cl(F)=\mathbb{R}$.

הערה:

תהיינה $A\subseteq B$ שתי תתי-קבוצות של מ"ט X כלשהו.

אזי: $int(A)\subseteq int(B)$, $cl(A)\subseteq cl(B)$

תרגיל:

הוכיחו / הפריכו לכל מ"ט X ולכל $A,B\subseteq X$:

1. $cl(A\cup B)=cl(A)\cup cl(B)$
2. $int(A\cap B)=int(A)\cap int(B)$
3. $cl(int(A))=int(cl(A))$

פתרון:

1. הוכחה: $A,B\subseteq A\cup B$

לכן על פי ההערה הנ"ל, $cl(A),cl(B)\subseteq cl(A\cup B)$ ומכאן $cl(A)\cup cl(B)\subseteq cl(A\cup B)$

הכלה בכיוון ההפוך: $A\subseteq cl(A)$, $B\subseteq cl(B)$ ולכן: $A\cup B\subseteq cl(A)\cup cl(B)$

$cl(A),cl(B)$ סגורות ולכן $cl(A)\cup cl(B)$ קבוצה סגורה כאיחוד סופי של סגורות.

מסה"כ נקבל ש- $cl(A\cup B)\subseteq cl(A)\cup cl(B)$

2. הוכיחו בבית (ניתן להוכיח באמצעות המשלימים ובאמצעות הקשר בין cl ובין int)

3. הפרכה: יהי: $X=\mathbb{R}$, $A=(2,3)$.

אזי: $int(A)=(2,3)$, $cl(int(A))=[2,3]$

$$cl(int(A))=[2,3]\neq int(cl(A))=int([2,3])=(2,3)$$

הגדרה: (רציפות בנקודה במ"ט)

יהיו X,Y מ"ט, תהי $f:X\to Y$ פונקציה ו- $p\in X$ נקודה כלשהי.

נאמר ש- f רציפה בנקודה p אם לכל סביבה U של $f(p)$ קיימת V סביבה של p כך ש- $f(V)\subseteq U$

$f:X\to Y$ "רציפה" אם היא רציפה לכל $x\in X$.

משפט:

$f:X\to Y$ רציפה אם ורק אם לכל U פתוחה ב-Y, $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X.

תרגיל:

תהיינה שתי קבוצות $X=\{a,b\}$, $Y=\{a,b,c\}$ ונגדיר עליהן טופולוגיות:

$\tau_Y=\{\phi,Y,\{c\}\}$, $\tau_X=\{\phi,X\}$. תהי $f:X\to Y$ מוגדרת ע"י:

$f(b)=a$, $f(a)=c$. הוכיחו כי f רציפה ב- b אך לא רציפה ב- a.

הוכחה:

רציפות ב- b:

תהי U סביבה של $f(b)=a$ (ביחס ל- τ_Y). בהכרח $U=Y$.

ניקח $V=X$ שהיא סביבה של b (ב- (X,τ_X)) ונקבל: $f(V)=f(X)\subseteq Y$.

אי-רציפות ב- a:

$f(a)=c$. אזי קיימת $U=\{c\}$ סביבה של $f(a)$ כך שלכל V סביבה של a

$f(V)\not\subseteq U$, אכן הסביבה היחידה V של a היא $V=X$

ומתקיים $a\in f(V)\setminus U$.

תרגיל:

יהי X מ"ט ותהי $A\subseteq X$. תהי $\chi_A: X\to\{0,1\}$ (עם הטופולוגיה הדיסקרטית) פונקציה אופיינית המוגדרת ע"י:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

הוכיחו: $x\notin\partial(A) \iff \chi_A$ רציפה ב- x.

הוכחה:

נוכיח רק בכיוון $\Leftarrow$: נניח ש- $x\notin\partial(A)=cl(A)\setminus int(A)$.

אזי $x\notin cl(A)$ או $x\in int(A)$.

נניח $x\in int(A)$. אזי $x\in A$ ו- $\chi_A(x)=1$. תהי U סביבה של 1. בפרט $\{1\}\subseteq U$

ניקח $V=int(A)$. אזי V סביבה (פתוחה) של X. ומתקיים: $\chi_A(V)=\chi_A(int(A))=\{1\}\subseteq U$

מקרה ב: $x\notin cl(A)$ ולכן $x\in int(A^c)$. במצב זה $\chi_A(x)=0$.

לכל U סביבה של 0 מתקיים $\{0\}\subseteq U$.

ניקח $V=int(A^c)$ ....

בכיוון $\Rightarrow$: תרגיל לבית.

טופולוגיה - תרגול 7

29.4.14

משפט:

יהיו X,Y מ"ט ותהי $f:X\to Y$ פונקציה.

הפונקציה f רציפה בכל נקודה של X אם מתקיים אחד משני התנאים השקולים הבאים:

1. $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-X לכל U פתוחה ב-Y.
2. $f^{-1}(F)$ סגורה ב-X לכל F סגורה ב-Y.

הגדרה:

נאמר שמ"ט X הוא:

א. T_0 - אם לכל $a\neq b\in X$ קיימות U,V סביבות של a,b בהתאמה רק ש- $a\notin V$ או $b\notin U$

ב. T_1 - מחליפים בהגדרת T_0 את המילה "או" ב"וגם".

ג. T_2 (האוסדורף) - אם לכל $a\neq b$ קיימות U,V סביבות של a,b בהתאמה שהן זרות.

ד. T_3 - אם הוא T_1 וגם לכל F סגורה ולכל $a\notin F$ קיימות U,V פתוחות רק ש- $a\in U$, $F\subseteq V$ ו- $U\cap V=\phi$

למה:

תהיינה $\tau\subseteq\sigma$ טופולוגיות על X. אזי: $(X,\tau)\in T_2 \Rightarrow (X,\sigma)\in T_2$.

הוכחה:

תהיינה $x\neq y\in X$. (X,τ) מרחב האוסדורף ולכן קיימות $U,V\in\tau$ רק ש- $x\in U$, $y\in V$ ו- $U\cap V=\phi$.

$\tau\subseteq\sigma$ ולכן $U,V\in\sigma$ ומכאן נקבל שגם (X,σ) האוסדורף.

תרגיל:

נתבונן ב-$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה של $S=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$. נאמר ש- $C\subseteq\mathbb{R}$ סגורה אם $C=A\cup T$ כאשר A תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית ו- $T\subseteq S$. הראינו בש"ב שהמשלימים של הקבוצות הנ"ל יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$. הוכיחו שמרחב זה T_2 ולא T_3.

הוכחה:

לא T_3 - בש"ב. כל A סגורה בטופולוגיה האוקלידית סגורה גם לפי הטופולוגיה הנ"ל שכן $A=A\cup\phi$ ו- $\phi\subseteq S$. לכן הטופולוגיה ה"חדשה" מכילה את הטופולוגיה האוקלידית המושרית ממרחב מטרי שהוא T_2. לפי הלמה הנ"ל גם המרחב הטופולוגי ה"חדש" הוא האוסדורף.

תרגיל:

יהי X מ"ט. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. X מרחב T_3.

ב. X מרחב T_1 ולכל $U\subseteq X$ פתוחה ו- $x\in U$ קיימת V סביבה פתוחה של x כך ש- $x\in V\subseteq cl(V)\subseteq U$.

הוכחה:

א⇐ב: ברור ש- X הוא T_1. תהי U פתוחה ב- X ו- $x\in U$. אזי $x\in \overset{\text{סגורה}}{U^c}$.

X הוא T_3 ולכן קיימות W, V פתוחות כך ש- $\boxed{(*)\ x\in V,\ U^c\subseteq W \text{ ו- } V\cap W=\emptyset}$

מ- (*) נקבל ש- $x\in V\subseteq \overset{\text{סגורה}}{W^c}\subseteq U$. $x\in V\subseteq \overset{\text{סגורה}}{W^c} \Leftarrow$ $x\in V\subseteq \underbrace{cl(V)}_{\text{הסגורה המינימלית המכילה את V}}\subseteq W^c$

מכאן $x\in V\subseteq cl(V)\subseteq W^c\subseteq U$

ב⇐א: נתון ש- X הוא T_1. תהי F סגורה ו- $x\notin F$. אזי $x\in \overset{\text{פתוחה}}{F^c}$. מתנאי ב' מתקיים שקיימת V פתוחה כך ש- $x\in V\subseteq cl(V)\subseteq F^c$. נקבל ש- $F\subseteq \underbrace{(cl(V))^c}_{\text{פתוחה}}$.

$x\in V$. מתקיים $V\cap(cl(V))^c=\emptyset$

הגדרה:

יהי X מ"ט, $a\in X$.

נאמר ש- B בסיס מקומי ב- a אם:

1. כל איברי B הם סביבות של A.
2. לכל U סביבה של a קיים $V\in B$ כך ש- $a\in V\subseteq U$.

הערה:

התרגיל הקודם בעצם אומר: X מרחב T_3 אם ורק אם T_1 והסביבות הסגורות של כל נקודה x מהוות בסיס מקומי.

הגדרה:

יהי (X,τ) מ"ט. $B\subseteq\tau$ תיקרא "בסיס לטופולוגיה" של X אם כל קבוצה פתוחה היא איחוד של קבוצות מ- B.

הגדרה שקולה:

אוסף של קבוצות פתוחות B הוא בסיס לטופולוגיה אם לכל U פתוחה ולכל $x\in U$ קיים $V\in B$ כך ש- $x\in V\subseteq U$

תרגיל:

א. הוכיחו שהפנים של קבוצת קנטור ריק.

ב. הסיקו שקבוצת קנטור היא תת מרחב טופולוגי של $\mathbb{R}$ ממימד 0 (מ"ט הוא ממימד 0 אם יש לו בסיס המורכב מסגורות

פתרון:

א. נניח בשלילה שקיימת נקודה פנימית $c\in C$. לכן קיים קטע פתוח ברדיוס ε שנסמנו O_ε כך ש- $c\in O_\varepsilon\subseteq C$.
↑הקטע ה-n-
קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon>\frac{1}{3^n}$. $O_\varepsilon\not\subseteq C_n$ שכן C_n מורכב מקטעים זרים בזוגות שאורכם $\frac{1}{3^n}$. מכיוון ש- $C=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n$ נקבל ש- $O_\varepsilon\not\subseteq C$ וזו סתירה.

ב. יהי $\mathcal{B}$ הבסיס הבא: קבוצה שייכת ל-$\mathcal{B}$ אם ורק אם היא מהצורה $C\cap(a,b)$ כאשר $a,b\notin C$. ברור שהקבוצות הנ"ל הן פתוחות. הן גם סגורות שכן לכל $a,b\notin C$ מתקיים $C\cap(a,b)=C\cap\overbrace{[a,b]}^{\text{סגורה ב-}\mathbb{R}}$.

תהי U פתוחה ב-C ו- $x\in U$. $U=O\cap C$ כאשר O פתוחה ב-$\mathbb{R}$ ולכן $x\in O\cap C=U$.
$x\in\overset{\text{פתוחה ב-}\mathbb{R}}{O}$ ולכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $x\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq O$.
הוכחנו ב-א' שכל קטע פתוח אינו מוכל ב-C. לכן קיימות a,b כך ש- $a\in(x-\varepsilon,x)\setminus C$, $b\in(x,x+\varepsilon)\setminus C$
מתקיים $x\in(a,b)\cap C\subseteq(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap C\subseteq O\cap C=U$

תרגיל:

יהי (X,τ) מ"ט מימדי 0 שהוא גם T_3. הוכיחו שהוא מרחב $T_{3\frac{1}{2}}$ (כלומר T_1 וגם לכל $F\subseteq X$ סגורה ולכל $x\notin F$ קיימת $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש- $f(x)=1$).

הוכחה:

תהי $F\subseteq X$ סגורה, $x\notin F$ ו- $f(y)=0$, $\forall y\in F$. מכיוון שמדובר במרחב T_3, קיימות U,V פתוחות כך ש- $F\subseteq V$, $x\in U$ ו- $U\cap V=\emptyset$.
X מימדי 0, $x\in\overset{\text{פתוחה}}{U}$ ולכן קיימת A סגוחה כך ש- $x\in A\subseteq U$.
מתקיים: $\chi_A:X\to\mathbb{R}$ (הפונקציה האופיינית) רציפה שכן A סגוחה (שב 6).
מתקיים $\chi_A(x)=1$, $\forall y\in F\ \chi_A(y)=0$ שכן מתקיים $F\subseteq V\subseteq U^c\subseteq A^c$

משפט (טופולוגיה):

תהי X קבוצה ו- $\mathcal{B}\subseteq P(X)$. התנאים הבאים שקולים:

1. $\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיה על X.
2. $\mathcal{B}$ כיסוי של X, כלומר $\bigcup_{A\in\mathcal{B}}A=X$ ומתקיים: $A,B\in\mathcal{B}\wedge x\in A\cap B\Rightarrow\exists C\in\mathcal{B}: x\in C\subseteq A\cap B$

התנאי האחרון שקול ל: $A,B\in\mathcal{B}\Rightarrow\exists J\subseteq\mathcal{B}:\bigcup_{C\in J}C=A\cap B$

דוגמה (המישור של מור (Moore):

יהי $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}$ (חצי מישור עליון סגור).

נגדיר טופולוגיה על X באמצעות בסיס B, כאשר B מורכב משני סוגי קבוצות:

I. כדורים פתוחים במטריקה האוקלידית שלא חותך את ציר ה-X.

II. כדורים פתוחים במטריקה האוקלידית המשיקים לציר ה-X כולל נקודת ההשקה.

טענה 1:

B בסיס לטופולוגיה האוסדורף על X.

הוכחה:

B בסיס:

1. ראשית B כסוי של X שכן כל הקבוצות מסוג I מכסות את $\{(x,y)|y>0\}$ ומתקיים $\{(x,y)|y=0\}\subseteq$ איחוד כל הקבוצות מסוג II

2. אם $U,V\in B$ ו-$x\in U\cap V$ ניתן לראות שקיימת $W\in B$ כך ש- $x\in W\subseteq U\cap V$

חלוקה למקרים: אם U,V מסוג שני ומשיקים בנקודה על ציר ה-X אזי בהכרח $U\subseteq V$ או $V\subseteq U$ והטענה ברורה.

בכל מצב אחר, ניתן למצוא W מסוג I כך ש- $x\in W\subseteq U\cap V$

האוסדורף:

נניח $x\neq y$. אם x,y שתיהן אינן על ציר ה-X, ניתן להפריד באמצעות שני קבוצות זרות מסוג I.

אם אחת מהן על ציר ה-X והשנייה אינה על ציר ה-X, אזי קיימות U,V אחת מסוג I ואחת מסוג II המבצעות את ההפרדה.

טופולוגיה - תרגול 8

13.5.14

משפט:

תהי $f: X\to Y$ פונקציה בין מ"ט.

יהי $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ כיסוי (סופי) סגור של X. אזי:

f רציפה $\Leftrightarrow$ $f|_{A_i}: A_i \to Y$ רציפה לכל $1\le i\le n$.

הוכחה:

נוכיח רק את הכיוון $\Leftarrow$: תהי G סגורה ב-Y, ונוכיח ש- $f^{-1}(G)$ סגורה ב-X.

$$f^{-1}(G)=\{x\in X \mid f(x)\in G\} = \{x\in A_1 : f(x)\in G\}\cup\{x\in A_2 : f(x)\in G\}\cup\dots\cup\{x\in A_n : f(x)\in G\}=$$
$$=\bigcup_{i=1}^{n}(f|_{A_i})^{-1}(G)$$

נוכיח שכל אחת מהקבוצות באיחוד הסופי סגורה ב- X ולכן האיחוד הסופי סגור ב- X.

$f|_{A_i}: A_i\to Y$ רציפה ולכן לכל $1\le i\le n$ $(f|_{A_i})^{-1}(G)$ סגורה ב-A_i.

A_i סגורה ב- X לכל $1\le i\le n$, ולכן $(f|_{A_i})^{-1}(G)$ סגורה ב- X לכל $1\le i\le n$ וקיבלנו הדרוש.

הערה:

קיים משפט דומה לכיסוי פתוח כלשהו - הוכחה בשיעורי הבית.

דוגמה:

נתבונן בפונקציה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:
$$f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ 2-x & x\in[1,2]\end{cases}$$

נשים לב כי $[0,1]\cup[1,2]=[0,2]$.

$[0,1],[1,2]$ סגורות ב- $\mathbb{R}$ ומוכלות ב- $[0,2]$ ולכן סגורות ב-$[0,2]$, כי מתקיים

$[0,1]=\overbrace{[0,1]}^{\text{סגורה ב-}\mathbb{R}}\cap[0,2]$ לכן יש לנו כיסוי סופי סגור של $[0,2]$.

$f_1(x)=x$, $f_1=f|_{[0,1]}$, $f_2(x)=2-x$, $f_2=f|_{[1,2]}$ $\to$ רציפות

f_1 רציפה כהגבלה ו- f_2 רציפה כפונקציה קבועה פחות פונקציית הזהות. לכן f רציפה.

הגדרה:

תהי $f: X\to Y$ פונקציה. נאמר ש- f פתוחה (או סגורה) אם לכל U פתוחה (או סגורה) ב- X,

$f(U)$ פתוחה (או סגורה, בהתאמה) ב- Y.

דוגמה:

בהינתן $f:(X,\tau_{Trivial})\to Y$, f ⇐ f פתוחה וסגורה,

כי $f(X)=Y$ ו- $f(\phi)=\phi$

תרגיל:

תהי $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון. הוכיחו:

א. p_1 רציפה ב. p_1 פתוחה ג. p_1 לא סגורה.

הוכחה:

א. הוכחנו בעבר.

ב. תזכורת: תהי $f:X\to Y$ פונקציה, $A_i\subseteq X$ לכל $i\in I$. מתקיים: $f(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$

לכן מספיק להוכיח שתמונה של כל קבוצת בסיס היא פתוחה או במ"מ תמונת כדור פתוח.

$$p_1(B((x,y),\varepsilon)) = (x-\varepsilon,x+\varepsilon) = \underbrace{B_{\mathbb{R}}(x,\varepsilon)}_{\text{כדור פתוח ב-}\mathbb{R}}$$

ג. נמצא קבוצה סגורה $A\subseteq\mathbb{R}^2$ כך ש-$p_1(A)$ לא סגורה ב-$\mathbb{R}$.

$$A=\{(x,y): x>0 \wedge y=\tfrac{1}{x}\} = \{(x,y): x\ge 0\}\cap\{(x,y): xy=1\}$$

$$= \underbrace{p_1^{-1}}_{\text{רציפה}}(\underbrace{[0,\infty)}_{\text{סגורה ב-}\mathbb{R}}) \cap \underbrace{g^{-1}}_{\text{רציפה}}(\underbrace{\{1\}}_{\text{סגורה}}) \quad g(x,y)=xy \quad \to \text{סגורה}$$

לכן A סגורה כחיתוך סגורות.

מצד שני, $p_1(A)=(0,\infty)$ לא סגורה ב-$\mathbb{R}$.

תרגיל:

מצאו דוגמה לפונקציה רציפה, סגורה ולא פתוחה.

פתרון:

נתבונן בפונקציית הערך השלם $f:(\mathbb{R},\underbrace{\tau_{sorg}}_{\text{Sorgenfrey}})\to(\mathbb{R},|\cdot|)$. נראה שהיא רציפה.

מספיק להוכיח שתמונה הפוכה של כדור פתוח היא קבוצה פתוחה. כדור פתוח ב-$(\mathbb{R},|\cdot|)$ הוא קטע פתוח.

נחלק למקרים: מקרה I: $(a,b)\cap\mathbb{Z}=\emptyset$ $f^{-1}((a,b))=\{x\in\mathbb{R}:[x]\in(a,b)\}$. במצב זה, $f^{-1}((a,b))=\emptyset$

מקרה II: קיימים $n\in\mathbb{Z}$, $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $\mathbb{Z}\cap(a,b)=\{n,n+1,n+2,\dots,n+t\}$

$$f^{-1}((a,b))=\{x: [x]\in\{n,n+1,n+2,\dots,n+t\}\} = [n,n+t+1)$$

$[n,n+t+1)$ פתוחה ב-$(\mathbb{R},\tau_{sorg})$

סגורה: נשים לב שלכל $A\subseteq\mathbb{R}$, $f(A)\subseteq\mathbb{Z}$. קל לראות באמצעות דרך סדרות שכל תת"ק של $\mathbb{Z}$ סגורה ב-$(\mathbb{R},|\cdot|)$.

לא פתוחה: $[0,1)$ פתוחה בישר של סורגנפריי אבל $f([0,1))=\underbrace{\{0\}}_{\text{לא פתוח ב-}(\mathbb{R},|\cdot|)}$

הערה:

דוגמאות נוספות לפונקציות רציפות, סגורות ולא פתוחות:

1. פונקציית ההכלה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$.
2. $X=\{0,1\}$, $\tau=\{\emptyset, X, \{1\}\}$ (סרפינסקי). נתבונן ב- $f\equiv 0$ מסרפינסקי לעצמו.

הגדרה:

פונקציה $f:X\to Y$ בין מ"ט נקראת "הומאומורפיזם" אם היא רציפה, הפיכה ו- f^{-1} רציפה.

הגדרה שקולה: f רציפה, הפיכה ופתוחה.
הגדרה שקולה נוספת: f רציפה, הפיכה וסגורה.

תרגיל:

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ ו- $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו ש- $Grf:=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 : x\in A\}$ הומאומורפי ל- A.

פתרון:

נגדיר פונקציה $h:A\to Grf$: $h(x)=(x,f(x))$

נתבונן ב- $\bar{h}:A\to\mathbb{R}^2$: $\bar{h}(x)=(x,f(x))$.

$\bar{h}$ רציפה שכן היא רציפה רכיב-רכיב (משפט 3)

$\bar{h}_2=f$ רציפה $\bar{h}_1=x$ רציפה כפונקציית ההכלה.
← הרכיב ה-2 של $\bar{h}$ ← הרכיב ה-1 של $\bar{h}$

$\bar{h}(A)\subseteq Grf$. h מתקבלת מ- $\bar{h}$ ע"י צמצום הטווח ולכן גם h רציפה.

קל לראות ש- $h^{-1}=g$ היא הפונקציה $g:Grf\to A$
$g(x,f(x))=x$

נתבונן ב- $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ שהיא רציפה. $p^{-1}(Grf)\subseteq A$.

g מתקבלת מ- p_1 הרציפה ע"י צמצום סימולטני של התחום ושל הטווח ולכן רציפה.

בסך הכל, h רציפה, הפיכה ו- h^{-1} רציפה ולכן h הומאומורפיזם.

קשירות

הגדרה:

יהי X מ"ט. נאמר ש-X לא קשיר אם קיימות U,V פתוחות זרות ולא ריקות כך ש- $X=U\cup V$.

הגדרה שקולה: ניתן להחליף בהגדרה הנ"ל "פתוחות" ב"סגורות".

הגדרה שקולה נוספת: X לא קשיר אם ורק אם קיימת בו סגוחה לא טריוויאלית U.

X קשיר אם הוא לא "לא קשיר".

משפט:

מ"ט X הוא קשיר אם ורק אם ה-X מקיים את תכונת ערך הביניים.

(כלומר, לכל $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה ולכל $a,b\in X$ אם $f(a)\le y\le f(b)$ אזי קיים $c\in X$ כך ש- $f(c)=y$).

תרגיל:

יהי (X,d) מ"מ כך ש- $2\le|X|\le\aleph_0$. הוכיחו שהמרחב לא קשיר.

הוכחה:

$2\le|X|$. ניקח $a\ne b\in X$. נניח בשלילה ש-X קשיר.

כזכור, $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_a(x)=d(a,x)$ רציפה.

נראה שהיא לא מקיימת את משפט ערך הביניים. $f_a(a)=0$, קיים $0<\varepsilon$ כך ש- $f_a(b)=d(a,b)=\varepsilon$.

מתקיים $|f(X)|\le|X|\le\aleph_0$ מצד שני, אם מתקיים ערך הביניים אזי $[0,\varepsilon]\subseteq f(X)$

ומכאן $\aleph\le|f(X)|$ וזו סתירה.

משפט:

יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y$ רציפה. אזי $f(X)$ קשיר.

תרגיל:

נתבונן ב- $GL_n(\mathbb{R})$ כתת מרחב מטרי של $\overset{\mathbb{R}^{n^2}}{\overset{\shortparallel}{M_n(\mathbb{R})}}$. האם הוא קשיר?

פתרון:

נניח בשלילה ש- $GL_n(\mathbb{R})$ קשיר. $\det:GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ רציפה ועל. נקבל מהמשפט הנ"ל ש- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ קשיר. אבל $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ ולכן $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ לא קשיר.

טופולוגיה - תרגול 9

20.5.14

תרגיל:

הוכיחו שלכל $c\in S^1$ מתקיים $S^1\setminus\{c\}\cong\mathbb{R}$, כאשר: $S^1=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2: a^2+b^2=1\}$

הוכחה:

מספיק להוכיח $S^1\setminus\{(0,1)\}\cong\mathbb{R}$.

נגדיר פונקציה $f: S^1\setminus\{(0,1)\}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(a,b)=\frac{a}{1-b}$.

ההופכית היא $g(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1},\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

קל לראות ש- f רציפה ו- $g=f^{-1}$ רציפה.

הערות:

1. לכל $a\in S^n$, $S^n\setminus\{a\}\cong\mathbb{R}^n$
2. לכל $a,b\in S^1$ ולכל $x\in\mathbb{R}$, $S^1\setminus\{a,b\}\cong\mathbb{R}\setminus\{x\}$

משפט:

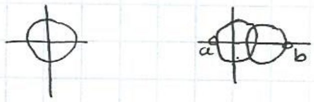
יהי X מ"ט. יהיו $A,B\subseteq X$ קשירים ונניח ש- $A\cap B\neq\emptyset$. אזי $A\cup B$ קשיר.

תרגיל:

נתבונן בשני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$$

$$Z=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x-\tfrac{3}{2})^2+y^2=1\}$$



קבעו האם המרחבים הומאומורפיים.

פתרון:

נוכיח ש- X ו- Z לא הומאומורפיים.

נניח בשלילה ש- $f: X\to Z$ הומאומורפיזם.

בסימונים הנ"ל קיימות $x,y\in X$ כך ש- $f(x)=a$ ו- $f(y)=b$.

נקבל ש- $f|_{X\setminus\{x,y\}}: X\setminus\{x,y\}\to Z\setminus\{a,b\}$ הומאומורפיזם.

המרחב $X\setminus\{x,y\}\cong\mathbb{R}\setminus\{c\}$ עבור $c\in\mathbb{R}$ ולכן לא קשיר, ומצד שני, $Z\setminus\{a,b\}$ קשיר.

$Z\setminus\{a,b\}$ הוא איחוד של המעגל הימני פחות b (שהוא קשיר, הומאומורפי ל- $\mathbb{R}$) עם המעגל השמאלי פחות a (גם כן קשיר מאותה הסיבה). חיתוכם לא ריק ולכן האיחוד קשיר.

הומאומורפיזם שומר על קשירות ומכאן נקבל סתירה.

טופולוגיית מכפלה:

יהיו X,Y מ"ט. נגדיר בסיס לטופולוגיה על הקבוצה $X\times Y$ שתיקרא "טופולוגיית המכפלה".

$$B=\{O_1\times O_2 : O_1\in \tau_X,\ O_2\in\tau_Y\}$$

למה: (הוכחה בשיעורי הבית)

יהי B_1 בסיס ל- (X,τ) ויהי $B_2\subseteq B_1$. אזי:

B_2 בסיס ל- (X,τ) אם ורק אם לכל $U\in B_1$ ולכל $x\in U$ קיימת $V\in B_2$ כך ש- $x\in V\subseteq U$.

טענה: (בסיס למכפלה)

יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^{n}$ מ"ט ויהיו $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ הבסיסים המתאימים.

אזי אוסף כל הקבוצות מהצורה $\{O_1\times O_2\times\ldots\times O_n : O_i\in B_i\ \forall_{1\le i\le n}\}$ הוא בסיס לטופולוגיית המכפלה.

הוכחה:

בסיס אפשרי לטופולוגיית המכפלה $M_1=\{O_1\times O_2\times\ldots\times O_n : \begin{smallmatrix} O_i\in\tau_i \\ \forall_{1\le i\le n}\end{smallmatrix}\}$.

מתקיים $M_2=\{O_1\times O_2\times\ldots\times O_n : O_i\in B_i\ \forall_{1\le i\le n}\}\subseteq M_1$ כי $B_i\subseteq\tau_i$ $\forall i$. לכן אפשר להשתמש בלמה הנ"ל.

תהי $O=O_1\times O_2\times\ldots\times O_n\in M_1$ (כלומר $\forall i: O_i\in\tau_i$) ותהי $x=(x_1,\ldots,x_n)\in O$.

נראה שקיימת $V\in M_2$ כך ש- $x\in V\subseteq O$.

B_i בסיס ל- (X_i,τ_i) לכל i ולכן לכל $i\in I$ קיימת $V_i\in B_i$ כך ש- $x_i\in V_i\subseteq O_i$.

לכן $x=(x_1,\ldots,x_n)\in V=V_1\times\ldots\times V_n\subseteq O_1\times O_2\times\ldots\times O_n=O$, כמובן $V\in M_2$.

משפט:

יהיו X,Y,Z מ"ט. $h:X\to Y\times Z$ רציפה אם ורק אם $h_1=P_Y\circ h$ ו- $h_2=P_Z\circ h$ רציפות.

תרגיל:

יהיו X,Y מ"ט ונניח ש- Y האוסדורף. תהיינה $f,g:X\to Y$ רציפות.

א. הוכיחו שהאלכסון $\Delta=\{(y,y): y\in Y\}$ סגור ב- $Y\times Y$.

ב. הסיקו שהקבוצה $A=\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ סגורה ב- X.

ג. נניח שקיימת B צפופה ב- X כך ש- $\forall x\in B\ f(x)=g(x)$. הוכיחו ש- $f\equiv g$.

ד. האם קיימת פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ השונה מפונקציית סינוס כך ש- $f(x)=\sin(x)$ $\forall x\in\mathbb{Q}$

פתרון בעמוד הבא...

פתרון:

א. נניח בשלילה ש- $cl(\Delta)\not\subseteq\Delta$

אזי קיימת $(x,y)\in Y\times Y$ כך ש- $(x,y)\in cl(\Delta)\setminus\Delta$.

מהגדרת האלכסון, $y\neq x$. Y האוסדורף ולכן קיימות U,V סביבות פתוחות זרות

של x ו-y בהתאמה כך ש- $U\cap V=\emptyset$. $U\times V$ סביבה של (x,y) בטופולוגיית המכפלה

ולכן $(x,y)\in cl(\Delta)$ ולכן $\exists (z,z)\in(U\times V)\cap\Delta\neq\emptyset$ אבל אז $z\in U\cap V$ בסתירה לכך ש-$U\cap V=\emptyset$.

ב. $A=\{x\in X: f(x)=g(x)\}=\{x\in X: (f(x),g(x))\in\Delta\}$

נגדיר $h: X\to Y\times Y$ ע"י $h(x)=(f(x),g(x))$. h רציפה שכן $h_1=f$ ו- $h_2=g$ רציפות.

נקבל ש- $A=\overset{\text{רציפה}}{h^{-1}}(\underset{\text{סגורה ב- } Y\times Y \text{ לפי א'}}{\Delta})$, ומכאן A סגורה ב- X.

ג. תהי B צפופה ב- X כך ש- $\forall x\in B\ f(x)=g(x)$.

לפי הגדרות A ו- B, $B\subseteq A$. לכן $cl(B)\subseteq cl(A)$.

$$\underset{\text{B צפופה ב- X}}{X} = \underset{\text{A סגורה}}{A}$$

$$\{x\in X: f(x)=g(x)\}=X \Rightarrow f=g$$

3. התשובה היא לא.

נניח שקיימת $f:\mathbb{R}\to\underset{\text{האוסדורף}}{\mathbb{R}}$ רציפה כך ש- $\forall x\in\mathbb{Q}\ f(x)=\sin(x)$.

$\mathbb{Q}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$ ו- f, $\sin(x)$ רציפות המתלכדות על $\mathbb{Q}$.

לכן לפי סעיף ג, $f\equiv\sin(x)$.

הגדרה:

מ"ט X נקרא "קשיר מסילתית" אם לכל $x,y\in X$ קיימת פונקציה רציפה $f:[0,1]\to X$

כך ש- $f(0)=x$, $f(1)=y$.

משפט:

קשירות מסילתית $\Rightarrow$ קשירות. ההפך אינו נכון בהכרח.

הגדרה:

תהי C תת קבוצה במ"ו כלשהו. נאמר ש- C קמורה אם לכל $x,y\in C$ ולכל $t\in[0,1]$

מתקיים $(1-t)x+ty\in C$.

טענה:

יהי $(X,\|\cdot\|)$ מ"נ (מרחב נורמי), ותהי $C\subseteq X$ קבוצה קמורה.

אזי C כת"מ של X קשיר מסילתית.

הוכחה:

המסילה שעושה את העבודה בין x ל-y היא $(1-t)x+ty$.

דוגמה:

בכל מ"נ כדור פתוח או סגור הוא תת קבוצה קמורה, לכן קשיר מסילתית ולכן קשיר.

משפט:

יהי X מ"ט ויהיו $A,B\subseteq X$ תתי מרחבים קשירים מסילתית.

אם $A\cap B\neq\emptyset$ אזי $A\cup B$ קשיר מסילתית.

טענה משיעורי הבית הבאים:

$\mathbb{R}^n\not\cong\mathbb{R}$ לכל $1<n$.

תרגיל:

הוכיחו שלכל $1\leq n$ המרחב S^n הינו קשיר מסילתית.

הוכחה:

יהיו $a\neq b\in S^n$. $S^n\setminus\{a\}\cong S^n\setminus\{b\}\cong\mathbb{R}^n$ ולכן קשיר מסילתית כי $\mathbb{R}^n$ קשיר מסילתית (כי הוא קמור)

$(S^n\setminus\{a\})\cap(S^n\setminus\{b\})\neq\emptyset$ ולכן $S^n=(S^n\setminus\{a\})\cup(S^n\setminus\{b\})$ קשיר מסילתית.

תרגיל:

הוכח/ הפרך:

א. $[3,\infty)\cong(-\infty,5]$

ב. $S^1\cong S^n$ עבור $1<n$.

פתרון:

א. קיים הומאומורפיזם $f:[3,\infty)\to(-\infty,5]$ המוגדר ע"י $f(x)=-x+8$ רציפה והפיכה, $f^{-1}(x)=-x+8$ גם כן רציפה.

ב. התשובה היא לא.

נניח בשלילה שקיים $1<n$ והומאומורפיזם $f:S^1\to S^n$.

תהי $a\in S^1$ נקבל ש-$f|_{S^1\setminus\{a\}}:S^1\setminus\{a\}\to S^n\setminus\{f(a)\}$ הומאומורפיזם.

אבל $S^1\setminus\{a\}\cong\mathbb{R}$ ו-$S^n\setminus\{f(a)\}\cong\mathbb{R}^n$ ולכן נקבל ש-$\mathbb{R}^1\cong\mathbb{R}^n$ בסתירה

לטענה האומרת כי $\mathbb{R}\not\cong\mathbb{R}^n$ לכל $1<n$.

טופולוגיה - תרגול 10

27.5.14

טענה:

יהי $f:X\to Y$ הומאומורפיזם. אזי f מעביר מרכיב קשירות למרכיב קשירות.

הערה:

קיים משפט אנלוגי למרכיבי קשירות מסילתית.

הוכחת הטענה:

יהי C מרכיב קשירות. אזי C קשיר.

f רציפה ולכן $f(C)$ תת מרחב קשיר של Y.

נראה ש- $f(C)$ קשיר מקסימלית.

נניח בשלילה שקיים $f(C)\subsetneq D$ כך ש- D קשיר.

f הומאומורפיזם ובפרט f^{-1} רציפה ולכן $C\subsetneq \underbrace{f^{-1}(D)}_{\text{קשיר}}$ בסתירה לכך ש- C מרכיב קשירות.

טענה:

יהי (X,τ) מ"ט עם התכונה הבאה: לכל נקודה קיימת סביבה קשירה מסילתית. (X קשיר מסילתית מקומית)

אזי כל מרכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה ב- X.

נוסף על כך, מרכיבי הקשירות המסילתית מתלכדים עם מרכיבי הקשירות ולכן הם סגורים.

הוכחה: בשיעורי הבית.

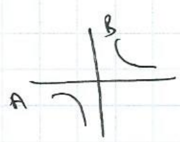
דוגמה:

תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. לכל $a\in A$ קיים $\varepsilon_a>0$ כך ש- $a\in B(a,\varepsilon_a)\subseteq A$

על פי מה שראינו בשבוע שעבר, $B(a,\varepsilon_a)$ קשיר מסילתית.

לכן A קשיר מסילתית מקומית. מכאן מרכיבי הקשירות המסילתית ב- A

מתלכדים עם מרכיבי הקשירות



תרגיל:

נתבונן בגרף של $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$,

האם זהו מרחב קשיר? האם הוא קשיר מסילתית? מצאו את מרכיבי הקשירות ואת מרכיבי הקשירות המסילתית.

פתרון:

על פי מה שהוכחנו בשבוע שעבר, $Grf\cong\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

$\mathbb{R}\setminus\{0\}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ולכן מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ מתלכדים עם מרכיבי הקשירות המסילתית.

מההומאומורפיזם נקבל ש- A,B הם מרכיבי הקשירות וגם מרכיבי הקשירות המסילתית של Grf.

ישנם 2 מרכיבים ולכן Grf לא קשיר ולא קשיר מסילתית.

תרגיל:

הוכיחו: אם $A\subseteq \mathbb{R}^2$ בת מניה, אז $\mathbb{R}^2\setminus A$ קשיר מסילתית.

פתרון:

יהיו $x,y\in\mathbb{R}^2\setminus A$. אם $x=y$ הטענה ברורה (ניקח פונקציה קבועה).

נניח ש- $x\neq y$. יהי B_x אוסף כל הישרים העוברים דרך x ונקודה מ- A

קל לראות ש- $|B_x|\le|A|\le\aleph_0$. עוצמת קבוצת כל הישרים העוברים דרך x

היא $\aleph$ כי כל שיפוע מגדיר ישר אחד ויחיד העובר דרך x, ויש $\aleph$ שיפועים.

לכן קיים ישר l_x העובר דרך x ולא עובר דרך אף נקודה ב- A.

מסיבות דומות, קיים ישר l_y העובר דרך y, שאין עליו נקודה מ- A והוא

לא מקביל ל- l_x ולא מתלכד עמו. (יש לשים לב כי יש רק ישר אחד

העובר דרך y ומקביל ל- l_x או מתלכד עמו).

לכן l_x ו- l_y נחתכים בנקודה z ומכאן ברור מה המסילה הדרושה (שרשור מסילות).

מכפלה אינסופית

תהי I קבוצת אינדקסים ויהי $\{X_i\}_{i\in I}$.

נגדיר את המכפלה הקרטזית $\prod_{i\in I}X_i$ באופן הבא:

$$\prod_{i\in I} X_i=\{f:I\to\bigcup_{i\in I}X_i \mid f(i)\in X_i\}$$

במקרה הסופי: תהינה $X_1=\{3,5\}$, $X_2=\{4,6\}$, $(3,4)\in X_1\times X_2$

ניתן לכתוב $f=(f(1)=3, f(2)=4)$

במקרה האינסופי: $f=(\ f(i)\ )$

ניתן להגדיר את פונקצית ההטלה $P_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$ $\qquad P_j(f)=f(j)$

טופולוגיית המכפלה

לכל $i\in I$, יהי (X_i,τ_i) מ"ט. נגדיר על $X=\prod_{i\in I}X_i$ את טופולוגית המכפלה τ_Π

באמצעות הבסיס הבא: $\mathcal{B}=\{\prod_{i\in I}A_i : \forall_i A_i\in\tau_i,\ \exists F\subseteq I\ (\text{סופי}),\ A_i=X_i\ \forall i\in I\setminus F\}$

זו הטופולוגיה הנ"ל, ההטלות לכל רכיב רציפות ופתוחות.

טענה:

יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ מ"ט.

תהי τ טופולוגיה על $X=\prod_{i\in I} X_i$ (לאו דווקא טופולוגיית המכפלה),

ונניח ש- $p_i:(\prod_{i\in I}X_i,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ רציפות לכל $i\in I$.

אזי $\tau_\pi\subseteq\tau$

הוכחה:

מספיק להוכיח שלכל $A=\prod_{i\in I}A_i\in\mathcal{B}$ מתקיים $A\in\tau$.

מקרה I: $\forall i\in I\ A_i=X_i$. (X,τ) מ"ט ולכן $X=\prod_{i\in I}X_i\in\tau$.

מקרה II: קיים $n\geq 1$ כך שלכל $i\in I\setminus\{i_1,\dots,i_n\}$ $A_i=X_i$.

כמו כן, $\forall i,\ A_i\in\tau_i$.

נתון ש- $p_{i_k}:(X,\tau)\to(X_{i_k},\tau_{i_k})$ $\forall 1\leq k\leq n$ רציפות $\forall_{1\leq k\leq n}$ $A_{i_k}\in\tau_{i_k}$

לכן מהרציפות הנ"ל $p_{i_k}^{-1}(A_{i_k})\in\tau$.

τ טופולוגיה ולכן סגור לחיתוך סופי. מכאן

$$\prod_{i\in I}A_i \overset{\text{לבדוק!}}{=} \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(A_{i_k})\in\tau$$

טענה:

יהיו $(X_1,\tau_1),\dots,(X_n,\tau_n)$ מ"ט מטריזביליים. אזי $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ מטריזבילי.

הוכחה:

מכיוון ש- (X_i,τ_i) מטריזביליים לכל $1\leq i\leq n$, אזי קיימות מטריקות $d_1,\dots,d_n$

המשרות את $\tau_1,\dots,\tau_n$ בהתאמה. נגדיר את המטריקה הבאה על קבוצת המכפלה $X=\prod X_i$:

$$d_{max}(x,y)=\max\{d_i(x_i,y_i):1\leq i\leq n\}$$

נסמן זמנית את הטופולוגיה המושרית מ- d_{max} ב- τ_{max}.

טענת עזר 1: $p_i:(X,d_{max})\to(X_i,d_i)$ רציפות לכל i.

הוכחה: להוכחת רציפות בנקודה $x=(x_1,\dots,x_n)$ יהי $\varepsilon>0$, ניקח $\delta=\varepsilon$.

מסקנה 1: $\tau_\pi\subseteq\tau_{max}$ (המסקנה נובעת מהמשפט הקודם)

טענת עזר 2: $B_{max}(x,\varepsilon)=B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times\dots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)$

הוכחה: תרגיל

מסקנה 2: $\tau_{max}\subseteq\tau_\pi$

הסבר: $C_{max}=\{B_{max}(x,\varepsilon):x\in X,\ \varepsilon>0\}$ בסיס ל- (X,τ_{max}).

כמו כן, $C_\pi=\{B_{d_1}(x_1,\varepsilon_1)\times\dots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon_n):x_i\in X_i,\ \varepsilon_i>0\}$ בסיס ל- (X,τ_π).

לפי טענת עזר 2, $C_{max}\subseteq C_\pi\subseteq\tau_\pi$ ולכן $\tau_{max}\subseteq\tau_\pi$

בסה"כ $\tau_{max}=\tau_\pi$ והוכחנו מטריזביליות.

מסקנה מהטענה האחרונה:

נבחר בטענה האחרונה $X_i=\mathbb{R}$.

$d_i(x,y)=|x-y|$ ~~[illegible]~~ לכל $1\le i\le n$.

נקבל מיידית שטופולוגיית המכפלה על $\mathbb{R}^n$ מתלכדת עם הטופולוגיה האוקלידית (המושרית מ-d_{max}).

קומפקטיות

הגדרה:

1. יהי מרחב טופולוגי. אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq M$ נקרא כיסוי פתוח של M, אם $M=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$.
2. אם $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי של M ו-$J\subseteq I$ תת-קבוצה של אינדקסים כך ש-$\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ הוא גם כיסוי של M, נאמר ש-$\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ תת-כיסוי של הכיסוי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.
3. מרחב טופולוגי נקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח יש תת-כיסוי סופי.

תרגיל:

הראו שתת-המרחב הבא איננו קומפקטי: $(0,1]\subseteq\mathbb{R}$.

פתרון:

לפי משפט היינה-בורל, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטי אם ורק אם A חסום וסגור.

לכן ברור ש-$(0,1]$, שאינו סגור, אינו קומפקטי.

נראה דרך כיסויים ש-$(0,1]$ איננו קומפקטי: $(0,1]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n},1]$. נראה שלכיסוי הפתוח הזה לא קיים תת-כיסוי סופי. נניח בשלילה שקיימים $n_1,\dots,n_k\in\mathbb{N}$ כך ש-$(0,1]=\bigcup_{i=1}^{k}(\frac{1}{n_i},1]$.

יהי $\varepsilon=\min\{\frac{1}{n_i}\mid 1\le i\le k\}$. מתקיים $\varepsilon\in(0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{k}(\frac{1}{n_i},1]$. לכן $(0,1]$ איננו קומפקטי.

משפט:

מרחב מטרי M הוא קומפקטי אם ורק אם הוא קומפקטי סדרתית (לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במרחב) אם ורק אם לכל $A\subseteq M$ אינסופית קיימת נקודת הצטברות.

דוגמה נגדית:

$\mathbb{R}$ איננו קומפקטי: $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ אינסופית ללא נקודות הצטברות, שכן כל סדרה המוכלת ב-$\mathbb{Z}$ ומתכנסת ל-$x\in\mathbb{R}$ קבועה לבסוף.

למה: (ללא הוכחה)

יהי (X,d) מרחב מטרי, ותהי $\{x_n\}\subseteq X$ סדרת קושי. אם $\{x_{n_k}\}$ תת-סדרה המתכנסת ל-$x\in X$, אזי $\{x_n\}$ מתכנסת ל-X.

תרגיל:

הוכיחו כי כל מרחב מטרי קומפקטי הוא שלם.

פתרון:

יהי (X,d) קומפקטי, ותהי $\{x_n\}$ סדרת קושי. (X,d) קומפקטי, ולכן ל-$\{x_n\}$ יש תת-סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}$. לפי הלמה, נקבל שגם $\{x_n\}$ מתכנסת. לכן X שלם.

מסקנה:

$(\mathbb{Z},d_p)$ ו-$\mathbb{R}$ אינם קומפקטיים, שכן הם אינם שלמים.

הערה:

שלם $\not\Rightarrow$ קומפקטי. למשל, $\mathbb{R}$.

טענה:

יהי X מרחב טופולוגי. $A\subseteq X$ קומפקטי אם ורק אם: אם $A\subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ כאשר O_i פתוחה ב-X לכל $i\in I$, אז קיים תת-כיסוי סופי $A\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_{i_j}$.

משפט:

יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף.

אם $A\subseteq X$ תת-מרחב קומפקטי, אזי A סגורה ב-X.

משפט:

יהי X קומפקטי. אם $A\subseteq X$ סגורה, אזי A תת-מרחב קומפקטי.

תרגיל:

מצאו דוגמה למרחב טופולוגי X ולקבוצה שאינה סגורה $A\subseteq X$ כך ש-A תת-מרחב קומפקטי.

הוכחה:

תהי X אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית. במצב זה, (X,τ_{cof}) אינו מרחב האוסדורף.

נוכיח שכל תת-המרחבים של X הם קומפקטיים.

יהי $A\subseteq X$. נניח ש- $A\subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, כאשר O_i פתוחה ב-X לכל $i\in I$.

יהי $x\in A$. אזי קיים $i_0\in I$ כך ש- $x\in O_{i_0}$. O_{i_0} פתוחה ב-X ואינה ריקה, ולכן $X\setminus O_{i_0}$ סופית.

$A\setminus O_{i_0}\subseteq X\setminus O_{i_0}$, ולכן היא גם סופית.

מקרה 1: $A\setminus O_{i_0}=\emptyset$. נקבל $A\subseteq O_{i_0}$, ומצאנו תת-כיסוי סופי.

מקרה 2: קיימים $x_1,\dots,x_n\in X$ כך ש-$A\setminus O_{i_0}=\{x_1,\dots,x_n\}$. לכל $1\le j\le n$ קיים O_{i_j} כך ש-$i_j\in I$ ו- $x\in O_{i_j}$.

מתקיים $A\subseteq O_{i_0}\cup \bigcup_{j=1}^{n} O_{i_j}$ ומצאנו תת-כיסוי סופי.

תהי $A\neq X$ אינסופית. נקבל ש-A אינה סגורה ב-X וגם A תת-מרחב קומפקטי.

משפט:

תהי $f:X\longrightarrow Y$ רציפה, כאשר X קומפקטי ו-Y האוסדורף. אזי f סגורה.

אם f בנוסף הפיכה, אזי f הומיאומורפיזם.

אם f בנוסף חד-חד ערכית אזי $f:X\longrightarrow f(X)$ הומיאומורפיזם, או במילים אחרות $f:X\longrightarrow Y$ שיכון טופולוגי.

תרגיל:

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי קומפקטי והאוסדורף. הוכיחו:

א. אם $\tau\subseteq\tau'$ ו-(X,τ') קומפקטי, אזי $\tau=\tau'$.

ב. אם $\tau''\subseteq\tau$ ו-(X,τ'') האוסדורף, אזי $\tau''=\tau$.

דוגמה:

נראה ש-$[0,1]$ כתת-מרחב של הישר של סורגנפריי $(\mathbb{R},T)$ איננו קומפקטי.

$[0,1]$ כתת-מרחב של $(\mathbb{R},|\cdot|)$ קומפקטי, לפי היינה-בורל. נתבונן בשתי טופולוגיות על $[0,1]$:

א. המושרית מ-$(\mathbb{R},|\cdot|)$, שאותה נסמן ב-τ.

ב. המושרית מ-$(\mathbb{R},T)$, שאותה נסמן ב-τ'.

$([0,1],\tau)$ קומפקטי (היינה-בורל) והאוסדורף (מרחב מטרי).

נניח בשלילה ש-$([0,1],\tau')$ קומפקטי. מתקיים $\tau=\tau'$, ולכן לפי התרגיל הנ"ל (סעיף א') $\tau=\tau'$.

$\tau\not\ni[\frac{1}{2},1)\in\tau'$, כי $([\frac{1}{2},1))^c=[0,\frac{1}{2})\cup\{1\}$ אינה סגורה לגבולות ולכן איננה סגורה במרחב המטרי $([0,1],\tau)$.

תרגיל: (ממבחן)

יהי M מרחב מטרי, ונניח שיש $a\in M$ שהיא נקודת הצטברות של M.

יהי A תת-המרחב הבא של $\mathbb{R}$: $A=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$.

הראו שקיים שיכון $g:A\longrightarrow M$ (כזכור, שיכון הוא העתקה שהיא הומיאומורפיזם על התמונה).

פתרון:

$a\in M$ נקודת הצטברות של M, ולכן קיימת סדרה $\{a_n\}\subseteq M$ של איברים שונים המתכנסת ל-a וגם $\forall n\in\mathbb{N}: a_n\neq a$. נגדיר $g:A\longrightarrow M$ ע"י $g(\frac{1}{n})=a_n$, $g(0)=a$.

A קומפקטי (תוכיחו בשיעורי הבית), M האוסדורף (כי M מרחב מטרי), ולכן על מנת להוכיח ש-g שיכון מספיק להוכיח ש-g שיכון. מספיק להוכיח ש-g רציפה וחד-חד ערכית.

ברור ש-g חד-חד ערכית. נותר להוכיח רציפות. יהי $z\in A$, צריך להוכיח ש-g רציפה ב-z, כלומר שלכל סביבה U של $g(z)$ ב-M קיימת סביבה V של z ב-A כך ש-$g(V)\subseteq U$.

(המשך הפתרון)

מקרה 1: $z=\frac{1}{n_0}$ עבור $n_0\in\mathbb{N}$. תהי U סביבה של $g(z)$.

ניקח $V=\{\frac{1}{n_0}\}$. היא סביבה של z, ומתקיים $g(V)\subseteq U$.

מקרה 2: $z=0$. תהי U סביבה של $g(0)=a$

$\lim_{n\to\infty} a_n=a$, לכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$, $g(\frac{1}{n})=a_n\in U$. ניקח

$$V=\left(-\frac{1}{n_0},\frac{1}{n_0}\right)\cap A$$

שהיא סביבה של 0 ב-A. לכל $0\neq x\in V$ מתקיים $x=\frac{1}{n}$, כאשר $n>n_0$, ולכן $g(x)\in U$.

ברור ש-$g(0)\in U$. סך הכל, $g(V)\subseteq U$.

משפט:

יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי ו-$f:X\to\mathbb{R}$. אזי f מקבלת מינימום ומקסימום.

תרגיל:

יהי (X,d) מרחב מטרי. $A,C\subseteq X$ לא ריקות כך ש-C קומפקטי.

הוכיחו שקיים $c_0\in C$ כך ש-$d(C,A)=d(c_0,A)$.

הוכחה:

בהרצאה.

תרגיל:

הוכיחו כי C (קבוצת קנטור) ו-$\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ הומיאומורפיים.

פתרון:

C קומפקטי (היינה-בורל), $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ האוסדורף (מכפלת האוסדורף). לכן מספיק למצוא פונקציה $g:C\to\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ הפיכה ורציפה, ואז היא תהיה הומיאומורפיזם.

נגדיר $g\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right)=(a_1,a_2,\ldots)$ (כאשר $a_n\in\{0,2\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$).

טופולוגיה - תרגול 12

17.6.14

הגדרה:

יהי X מ"ט ותהי Y קבוצה כלשהי.

תהי $f: X\to Y$ על. אזי הטופולוגיה החזקה ביותר על Y כך ש- f רציפה

היא טופולוגיית המנה של Y. נסמנה τ.

ניתן להגדיר באופן הבא: $O\in\tau \Leftrightarrow f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X.

הגדרה - העתקת מנה:

יהיו X,Y מ"ט. תהי $f: X\to Y$ על. נאמר שהיא העתקת מנה אם:

O פתוחה ב- Y $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X.

דיון:

יהיו X,Y מ"ט. יהי $\sim$ יחס (יחס שקילות) על X.

נסמן ב- $X/_\sim$ את אוסף מחלקות השקילות. נתבונן בפונקציה הטבעית $\rho: X\to X/_\sim$
$\rho(x)=[x]$

נניח מכאן והלאה ש- $X/_\sim$ מצויד בטופולוגיית המנה (ρ העתקת מנה).

* יש לשים לב ש- ρ על.

המטרה: להראות ש- $X/_\sim\cong Y$.

תהי $f: X\to Y$ פונקציה. נאמר ש- f מכבדת את יחס השקילות אם:

$x\sim y \Rightarrow f(x)=f(y)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f=\hat{f}\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Y \\ & X/_\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

כאשר $f(x)=\hat{f}(\rho(x))=\hat{f}([x])$.

אם f מכבדת את יחס השקילות אזי $\hat{f}$ מוגדרת היטב.

תכונות:

1. $\hat{f}$ מוגדרת היטב אם ורק אם f מכבדת את יחס השקילות.
2. ($x\sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$) אם ורק אם $\hat{f}$ חח"ע.
3. f על אם ורק אם $\hat{f}$ על

טענה:

יהיו X,Y מ"ט ו- $\sim$ יחס על X. תהי $f: X\to Y$ מכבדת את יחס השקילות.* אזי:

1. f רציפה אם ורק אם $\hat{f}$ רציפה.
2. f מנה אם ורק אם $\hat{f}$ מנה.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f=\hat{f}\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Y \\ & X/_\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

טענה: (הוכחה בש"ב)

תהי $g: X\to Y$ מנה.

אזי g הומאומורפיזם $\iff$ g חח"ע.

קריטריון מספיק ולא הכרחי

1. אם f רציפה, על ופתוחה אזי f מנה.
2. אם f רציפה, על וסגורה אזי f מנה.

דוגמה:

1. הטלות על כל רכיב הן רציפות, על ופתוחות ולכן הן העתקות מנה.
2. פונקציה רציפה ועל ממרחב קומפקטי להאוסדורף תהיה בנוסף סגורה ולכן מנה.

סכום השלבים:

שלבי הפעולה כשנרצה להוכיח ש- $Y \cong X/_\sim$:

1. מציאת פונקציה $f: X\to Y$ על וגם מקיימת $x\sim y \iff f(x)=f(y)$

(נקבל משני התנאים האלו ש- $\hat f: X/_\sim \to Y$ חח"ע ועל, כלומר הפיכה.

2. א. אם קל להראות אז נוכיח ש- $f: X\to Y$ <u>מנה</u> ואז $\hat f$ תהיה מנה

ובסך הכל מנה + חח"ע ולכן $\hat f$ הומאומורפיזם.

אחרת,

ב. נוכיח <u>רק</u> ש- f רציפה ואז $\hat f$ רציפה. במקרה המיוחד שבו $X/_\sim$ קומפקטי

ו- Y האוסדורף, אז העובדה ש- $\hat f$ רציפה והפיכה תגרור ש- $\hat f$ הומאומורפיזם.

<u>ג</u>. נמצא את ההופכית ל- $\hat f$ ונראה שהיא רציפה.

תרגיל:

נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \iff y_1=y_2$.

הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/_\sim$ הומאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

פתרון:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "f=\hat f\circ p"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R} \\ & \mathbb{R}^2/_\sim \arrow[ur, "\hat f"'] & \end{tikzcd}$$

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$.

מתקיים: (*) $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \iff y_1=y_2 \iff f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$. לכן f חח"ע.

f רציפה, על ופתוחה כהטלה. לכן f מנה ועל פי משפט $\hat f$ מנה.

לכן $\hat f$ מנה + חח"ע ומכאן הומאומורפיזם.

<u>דרך אחרת</u>: מכיוון ש- f רציפה, $\hat f$ רציפה. $\hat f$ חח"ע כי f מקיימת את (*).

$\hat f$ על כי f על. נחפש את ההופכית של $\hat f$, g, $g:\mathbb{R}\to \mathbb{R}^2/_\sim$ כך ש- $g(y)=[(0,y)]$.

המשך בעמוד הבא..

המשך הפתרון:

$$\hat f(g(y)) = \hat f[(0,y)] = f(0,y) = y$$

$$g(\hat f[(x,y)]) = g(f(x,y)) = g(y) = [(0,y)] \underset{(0,y)\sim(x,y)}{=} [(x,y)]$$

נשים לב ש- $g = \rho\circ h$ כאשר $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, ($h(y)=(0,y)$, $\rho(x,y)=[(x,y)]$)

ברור ש- ρ רציפה.

h רציפה כי היא רציפה רכיב-רכיב. הרכיב הראשון הוא פונקציה קבועה והרכיב השני הוא פונקציית הזהות.

לכן g רציפה כהרכבת רציפות, ובסה"כ $\hat f$ רציפה הפיכה ו- $(\hat f)^{-1}$ רציפה.

לכן $\hat f$ הומאומורפיזם.

<u>תרגיל:</u>

נגדיר יחס על $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$: $(x_1,y_1,z_1)\sim(x_2,y_2,z_2) \iff (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

מצאו למה הומאומורפי $S^2/_\sim$?

<u>פתרון:</u>

נרצה להראות ש- $S^2/_\sim \cong D$ כאשר $D=\{(x,y)\in\mathbb{R} : x^2+y^2\le 1\}$.

נגדיר פונקציה $f:S^2\to D$ ע"י $f(x,y,z)=(x,y)$.

(יש לשים לב ש- $x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow x^2+y^2\le 1$).

לכן $f(S^2)\subseteq D$. f על שכן מקור של (x,y) הוא $(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$.

קל לראות ש- $(x_1,y_1,z_1)\sim(x_2,y_2,z_2)\iff f(x_1,y_1,z_1)=f(x_2,y_2,z_2)$

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[rr, "f=\hat f\circ p"] \arrow[dr, "p"'] & & D \\ & S^2/_\sim \arrow[ur, "\hat f"'] & \end{tikzcd}$$

לכן $\hat f: S^2/_\sim\to D$ חח"ע. f על ולכן $\hat f$ על.

$f:S^2\to D$ רציפה שכן היא מתקבלת כצמצום של התחום ושל הטווח של

הפונקציה הרציפה $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $h(x,y,z)=(x,y)$

h רציפה שכן היא רציפה רכיב-רכיב (הטלה על רכיב).

S^2 קומפקטי שכן חסום וסגור (היינה בורל), D האוסדורף כמרחב מטרי.

$\underset{\text{קומפקטי}}{S^2} \xrightarrow{\text{על}} \underset{\text{האוסדורף}}{D}$: f רציפה ולכן f גם סגורה ומנה.

לכן $\hat f$ מנה, ומכיוון שהיא גם חח"ע אזי $\hat f$ הומאומורפיזם.

תרגיל: (ממבחן)

על $\mathbb{R}$ נגדיר את יחס השקילות הבא: $x\sim y \iff \sin(x)=\sin(y)$.

הראו כי $\mathbb{R}/_\sim \cong [0,1]$

פתרון:

נראה ש- $\mathbb{R}/_\sim \cong [-1,1]$, ומכיוון ש- $[-1,1]$ ו- $[0,1]$ הומאומורפיים (כי כל הקטעים הסגורים הומאומורפיים זה לזה) נסיק את הדרוש.

נגדיר $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ ע"י $f(x)=\sin(x)$. ברור ש- $x\sim y \iff f(x)=f(y)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f=\hat{f}\circ p"] \arrow[d, "p"'] & {[-1,1]} \\ \mathbb{R}/_\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

ולכן $\hat f$ חח"ע. f על ולכן $\hat f$ על.

נתבונן ב- $p|_{[0,2\pi]}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}/_\sim$. היא רציפה ועל ממרחב קומפקטי ולכן $\mathbb{R}/_\sim$ קומפקטי.

f רציפה ולכן $\hat f$ רציפה.

$\hat f: \underbrace{\mathbb{R}/_\sim}_{\text{קומפקטי}} \to \underbrace{[-1,1]}_{\text{האוסדורף}}$ רציפה והפיכה היא הומאומורפיזם.

תרגיל:

נתבונן במרחב שרפינסקי. זהו המרחב $X=\{0,1\}$ עם הטופולוגיה $\tau=\{\emptyset, X, \{0\}\}$.

א. הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.

פתרון: $\{0\}$ לא סגור במ"ט זה ומצד שני בכל מ"מ כל הנקודונים סגורים.

ב. יהי $I=[0,1]$ ותהי $f:I\to\{0,1\}$ מוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,\frac12)\\ 1 & x\in[\frac12,1]\end{cases}$

נגדיר יחס על I באופן הבא: $a\sim b \iff f(a)=f(b)$.

הוכיחו כי $I/_\sim$ הומאומורפי למרחב שרפינסקי.

פתרון: נתבונן בתרשים הבא:
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f=\hat{f}\circ p"] \arrow[d, "p"'] & \{0,1\} \\ I/_\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$
מתקיים $f(a)=f(b) \iff a\sim b$ ולכן $\hat f$ חח"ע.

f על ולכן $\hat f$ על. נראה ש- f מנה ולכן $\hat f$ תהיה מנה, ומכאן שהיא גם חח"ע $\hat f$ תהיה הומאומורפיזם.

f <u>רציפה</u>: מספיק להוכיח ש- $f^{-1}(\{0\})$ פתוחה. $f^{-1}(\{0\})=[0,\frac12)$ פתוחה ב-$[0,1]$.

צ"ל שאם $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- I אז U פתוחה במרחב שרפינסקי:

מספיק להוכיח ש- $U\neq\{1\}$. נניח בשלילה ש- $f^{-1}(U)$ פתוחה וגם $U=\{1\}$.

$$f^{-1}(\{1\})=[\tfrac12,1]$$

$[\frac12,1]$ לא פתוחה ב- $[0,1]$, והגענו לסתירה.