אלגברה לינארית לתיכוניסטים־פתרונות לתרגיל 1

שאלה 1

סעיף א

נכתוב את z בכתיב פולארי, כלומר $z = r\operatorname{cis}\theta$ ולפי דה מואבר $1 = z^7 = r^7\operatorname{cis}7\theta$. מכאן נקבל $r^7 = 1$ ולכן $r = 1$ (נזכור ש r תמיד חיובי בכתיב פולארי)

כמו כן, $7\theta = 2\pi k$ (כאשר $k \in \mathbb{Z}$) ולכן $\theta = \frac{2\pi k}{7}$. נזכור שיש משמעות לערכי θ רק בין 0 ל 2π (כי אחרת הם חוזרים על עצמם) ולכן אפשר להסתפק ב $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$

כלומר הפתרונות הם:

$$z = \operatorname{cis}0 = 1, \quad z = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{7}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{7}, \ldots, z = \operatorname{cis}\frac{12\pi}{7}$$

סעיף ב

$$(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{10} = (\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})^{10} = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

כלומר המשוואה היא

$$z^4 = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

שוב נכתוב

$$z^4 = r^4\operatorname{cis}4\theta = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$$

ונקבל $r = 1$ ו $4\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ כאשר $k \in \mathbb{Z}$ כלומר

$$\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

היות ומחזורים של 2π לא משנים אפשר להסתפק ב $k = 0, 1, 2, 3$ ולכן הפתרונות הם

$$z = \operatorname{cis}\frac{\pi}{8}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{5\pi}{8}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{9\pi}{8}, \quad z = \operatorname{cis}\frac{13\pi}{8}$$

שאלה 2

אם נחליט שנקרא לאברי השדה $0, 1, a, b$ אז טבלאות החיבור והכפל יהיו

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

זה די ברור שיש סגירות, חילופיות,איבר נטרלי, והופכי. מה שיותר מייגע להראות זה פילוג וקיבוץ

נשים לב ש $(xy)z = x(yz)$ מתקיים אם אחד מ x, y, z שווה ל 0 או 1 ולכן נותר לבדוק את המקרים שבהם המשתנים יכולים להיות a או b (8 מקרים).

נשים לב ש $(x+y)+z = x+(y+z)$ מתקיים אם אחד המשתנים הוא 0 אז נותר לבדוק את המקרים שבהם המשתנים יכולים להיות $1, a, b$ (27 מקרים).

נשים לב ש $x(y+z) = xy + xz$ מתקיים אם אחד המשתנים הוא 0, וברור שהוא מתקיים אם $x = 1$, נותר לבדוק 18 מקרים.

מייגע אבל אפשרי.

שאלה 3

נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a+2) & a-1 \end{array}\right)$$

אם $a \neq 1, -2$ אז נקבל שאין משתנים חופשיים ואין שורות סתירה ולכן יש פתרון יחיד שהוא:

$$z = \frac{1}{a+2}$$

$$(a-1)y + (1-a)z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{a+2}$$

$$x + y + az = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{a+2} - \frac{a}{a+2} = \frac{1}{a+2}$$

אם $a = -2$ נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

כלומר אין פתרון

אם $a = 1$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נסמן $z = s_1$ ו $y = s_2$ ואז $x = 1 - s_1 - s_2$ כלומר יש אינסוף פתרונות: $(1-s_1-s_2, s_2, s_1)$.

שאלה 4

נדרג את המטריצה שמייצגת את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a^2 & 5 & 1 & b \\ a & a+3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ a & a+3 & 3 & 0 \\ a^2 & 5 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-a & 3-a & 0 \\ a^2 & 5 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 - a^2 R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-a & 3-a & 0 \\ 0 & 5-2a^2 & 1-a^2 & b \end{array}\right)$$

נניח ש $a \neq 3$. למקרה $a = 3$ נחזור אח"כ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3-a & 3-a & 0 \\ 0 & 5-2a^2 & 1-a^2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = \frac{1}{3-a} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5-2a^2 & 1-a^2 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = R_3 - (5-2a^2) R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+3 & b \end{array}\right)$$

אם $a \neq 2$ ו $a \neq -2 = 5$ אז יש פתרון יחיד שהוא

$$z = \frac{b}{a^2+3}$$

$$y = -\frac{b}{a^2+3}$$

$$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a^2+3}$$

נחזור למקרים הבעיתיים: אם $a = 3$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & b \end{array}\right)$$

נקבל ש z משתנה חופשי ולכן יש 7 פתרונות:

$$z = s$$

$$y = b - 6s = b + s$$

ו

$$x=-2y-z=-2b-3s=5b+4s$$

אם $a=2,5$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

אם $b\neq 0$ אז יש שורת סתירה ואין פתרון. אם $b=0$. נקבל שוב 7 פתרונות:

$$z=s$$

$$y=-s=6s$$

$$x=-2y-s=s$$

שאלה 5

היות ו $11^2=121$ מערכת משוואות מעל $\mathbb{Z}_{11}$ עם 2 איברים חופשיים תתאים לנו. למשל:

$$x+y+z=0$$

שאלה 6

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 1 & a & a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

אם $a=0$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

כלומר יש פתרון יחיד
אם $a=1$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

כלומר אין פתרון
אם $a=2$ אז נקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי אחד ולכן יש 3 פתרונות.

שאלה 7

סעיף א

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

סעיף ב

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2012} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

היות ו

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

נקבל ש

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2012} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 8

סעיף א

נבדוק מה הערך במקום ה r,s של המטריצה $E_{i,j}E_{k,l}$ יש פה הרבה אינדקסים אבל הכל לפי הגדרה

$$(E_{i,j}E_{k,l})_{r,s} = \sum_{t=1}^{n}(E_{i,j})_{r,t}(E_{k,l})_{t,s}$$

האיבר $(E_{i,j})_{r,t}$ יהיה 0 אלא אם כן $t=j$ ולכן כל האיברים בסכום שלמעלה הם 0 חוץ מאשר אולי האיבר שבו $t=j$. כלומר:

$$\sum_{t=1}^{n}(E_{i,j})_{r,t}(E_{k,l})_{t,s} = (E_{i,j})_{r,j}(E_{k,l})_{j,s}$$

נניח ראשית ש $k \neq j$. האיבר $(E_{k,l})_{j,s}$ הוא 0 (כי במטריצה $E_{k,l}$ אין 0 רק במקום k,l ואנחנו מסתכלים על המקום ה j,s והנחנו $k \neq j$) לכן הכפל הכולל הוא 0

כלומר בכל מקום r,s של המטריצה $E_{i,j}E_{k,l}$ יש 0 , זה אומר בדיוק ש $E_{i,j}E_{k,l}$ היא מטריצת ה 0.

אם $k=j$. אז שוב נקבל

$$\sum_{t=1}^{n}(E_{i,j})_{r,t}(E_{k,l})_{t,s} = (E_{i,j})_{r,j}(E_{k,l})_{j,s} = (E_{i,j})_{r,j}(E_{j,l})_{j,s}$$

אם $r=i$ ו $s=l$ נקבל בדיוק 1. אחרת, אחד האיברים יהיה 0 ולכן גם המכפלה תהיה 0.

כלומר $E_{i,j}E_{k,l}$ היא מטריצה שיש לה 1 במקום ה i,l ו 0 בכל מקום אחר. וזה בדיוק אומר ש $E_{i,j}E_{k,l} = E_{i,l}$

סעיף ב

נשתמש בכפל עמודה־עמודה

$$C_k(AE_{i,j}) = AC_k(E_{i,j})$$

אם $k \neq j$ ברור ש

$$AC_k(E_{i,j}) = A \cdot 0 = 0$$

כלומר כל העמודות פרט לעמודה ה j הן 0.

אם $k=j$ אז

$$C_j(AE_{i,j}) = AC_j(E_{i,j}) = \sum_{t=1}^{n}(E_{i,j})_{t,j}C_t(A)$$

כל עוד $t \neq i$ יתקיים ש $(E_{i,j})_{t,j} = 0$ כלומר הערך היחיד שלא מתאפס מהסכום שלמעלה הוא $t=i$ולכן:

$$\sum_{t=1}^{n}(E_{i,j})_{t,j}C_t(A) = (E_{i,j})_{i,j}C_i(A) = C_i(A)$$

כלומר העמודה ה j של $AE_{i,j}$ היא העמודה ה i של A.

סעיף ג

בדומה לסעיף ב אבל עם כפל שורה־שורה.

סעיף ד

אם $t \neq l$ אז לפי כפל עמודה־עמודה נקבל

$$C_t(E_{i,j}AE_{k,l}) = E_{i,j}AC_t(E_{k,l}) = E_{i,j}A0 = 0$$

כלומר במטריצה $E_{i,j}AE_{k,l}$ כל העמודות פרט לעמודה ה l הן 0.
אם $t \neq i$ אז לפי כפל שורה־שורה נקבל

$$R_t(E_{i,j}AE_{k,l}) = R_t(E_{i,j})AE_{k,l} = 0AE_{k,l} = 0$$

כלומר כל השורות במטריצה $E_{i,j}AE_{k,l}$ פרט לשורה ה t הן 0.

לפי זה ברור שהאיבר היחיד שיכול להיות שהוא לא 0 הוא האיבר ה i,l. נחשב את ערכו לפי ההגדרה של כפל

$$(E_{i,j}AE_{k,l})_{i,l} = \sum_{t=0}^{n}(E_{i,j}A)_{i,t}(E_{k,l})_{t,l}$$

אבל $(E_{k,l})_{t,l}$ הוא 0 אלא אם $t = k$ ולכן

$$\sum_{t=0}^{n}(E_{i,j}A)_{i,t}(E_{k,l})_{t,l} = (E_{i,j}A)_{i,k}(E_{k,l})_{k,l} = (E_{i,j}A)_{i,k}$$

$$= \sum_{t=0}^{n}(E_{i,j})_{i,t}(A)_{t,k}$$

ושוב $(E_{i,j})_{i,t}$ הוא 0 אלא אם כן $t = j$ ולכן

$$\sum_{t=0}^{n}(E_{i,j})_{i,t}(A)_{t,k} = A_{j,k}$$

כלומר המטריצה $E_{i,j}AE_{k,l}$ היא מטריצה שכולה 0 פרט לאיבר ה i,l שהוא $A_{j,k}$.
כלומר

$$E_{i,j}AE_{k,l} = A_{j,k}E_{i,l}$$

שאלה 9

סעיף א

סגור לכפל. אם A, B הן שתי מטריצות משולשיות עליונות אז אם $j < i$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n}A_{i,k}B_{k,j}$$

היות ו $j < i$ בהכרח יתקיים $k < i$ או $j < k$ ולכן בכל איבר של הסכום או ש $A_{i,k} = 0$ או ש $B_{k,j} = 0$ ולכן הסכום הוא 0.

כלומר המטריצה AB היא גם כן משולשית עליונה.

סעיף ב

לא סגור לכפל. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר מצאנו שתי מטריצות משולשיות שהכפל שלהן היא לא מטריצה משולשית

סעיף ג

סגור לכפל. אם A, B אלכסוניות אז אם $i \neq j$ נקבל ש

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

נקבל שבוודאות $k \neq i$ או $k \neq j$ בכל איבר של הסכום ולכן בכל איבר $A_{i,k} = 0$ או $B_{k,j} = 0$ ולכן כל הסכום הוא 0. זה בדיוק אומר ש AB אלכסונית.

סעיף ד

סגור לכפל. אם $A = c_1 I$ ו $B = c_2 I$ אז

$$AB = c_1 c_2 I$$

גם כן מטריצה סקלרית.