

10.3.2006  
 מוסד לביטוח לאומי  
 תשס"ו

מבחן בתוצאה 1.  
 מרצה: פאול בוקן.

\* משק הבחינה: 3 1/2 שעות.  
 \* חומר סגור, למטה מחשבון.

\* יש לפרוק שאלה אחת מתוך אלו eitel שאלות מתוך (אין לדבר סדרים שאלות עיוניות).

בהצלחה !!!

חלק א'

יש לענות על שאלה אחת מתוך שתי השאלות הבאות:

1. (25 נק.) הוכיח את הקריטריון הבא של Cauchy להתכנסות סדרות.  
 יהי  $\{a_n\}$  סדרה המקיימת: לכל  $\epsilon > 0$ , קיים  $N$  כך שלכל  $n, m \geq N$   
 מקיים  $|a_n - a_m| < \epsilon$ . אזי  $\{a_n\}$  מתכנסת (באופן יחיד).

2. (25 נק.) יהי  $I$  קטע פתוח!  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה בנק.  $x_0 \in I$ .  
 נתון של-  $f$  יש מינמום בנק.  $x_0$  בוה"א  $f'(x_0) = 0$ .

חלק ב'

יש לענות על שלושה מתוך ארבע השאלות הבאות:

3. (סה"כ 25 נק.)

א. (15 נק.) יהי  $I$  קטע פתוח!  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה גזירה 10 פעמים בנק.  $x_0 \in I$ .  
 נתון של-  $f$  יוצרת ממש בקטע  $[x_0 - \delta, x_0]$  וזוה"א  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(9)}(x_0) = 0$  וקיים  $\delta > 0$   
 כך  $f$  יוצרת ממש בקטע  $[x_0, x_0 + \delta]$  וזוה"א  $f^{(10)}(x_0) > 0$ . הוכיח שקיים  $\delta > 0$

ב. (10 נק.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$  /גב' (10 נק.)



4. (סדר 25 נק.)

א. (15 נק.) תהי  $\{a_n\}$  סדרה המקומטת:  $a_n > 0, n \in \mathbb{N} \forall$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ .  
הוכחי שהסדרה  $\{a_n\}$  מתכנסת אל  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

ב. (10 נק.) יהי  $x_0 \in \mathbb{R}$ . נגזיר סדרה  $\{a_n\}$  ע"י  
$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k \cdot x_0)}{2^k}$$

האם הסדרה  $\{a_n\}$  מתכנסת? הוכחי/את תלביק.

$$|a_n - a_{n+1}| < \epsilon$$

5. (סדר 25 נק.)

א. (15 נק.) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. נתון  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  ו- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .  
עזרים קיימים לופיים. הוכחי/י  $f$  רציפה גם ב- $\mathbb{R}$ .

ב. (10 נק.) תהי  $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. נתון  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$ .  
הוכחי/י  $f$  אילנה רציפה גם ב- $[a, \infty)$ .

6. (סדר 25 נק.) תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה.  
א. (15 נק.) נתון  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  ו- $l \in \mathbb{R}$ .

הוכחי/י  $f$  מקבלת מינימום או מקסימום ב- $\mathbb{R}$ .

ב. (10 נק.) האם התסקנה ב-א' עדיין מתקיימת אם במקום קרניים  
-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  ו- $l \in \mathbb{R}$ .  
קיימים לופיים? (אך קלא צוקא עליהם זה קשה)?  
הוכחי/את תלביק.

בהצלחה !!!

