83-116 מתמטיקה בדידה – תרגיל 10

שאלה 1 פתור את נוסחאות הנסיגה הבאות:

א. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$,$a_1 = -1, a_2 = 1$

הפולינום האופייני: $x^2 - 5x + 6 = 0$. שורשי המשוואה הם $x_1 = 2, x_2 = 3$. לכן $a_n = \alpha(2)^n + \beta(3)^n$. נמצא את α, β באמצעות תנאי הבסיס של הרקורסיה:
$a_1 = 2\alpha + 3\beta = -1$, $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ כלומר $\beta = 1, \alpha = -2$.

לסיכום נקבל $a_n = -(2)^{n+1} + (3)^n$ לכל $n \geq 0$.

ב.
$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-1}$,$a_0 = 1, a_1 = 3$

הפולינום האפייני $x^2 - 2x - 1 = 0$

כלומר שורשי הפולינום הם: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ ולכן נוסחת הנסיגה היא מהצורה $a_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$ $a_0 = 1, a_1 = 3$.

כלומר $a_1 = 3 = \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2})$ $a_0 = 1 = \alpha + \beta$.

מהתנאי השני נקבל $\alpha = 1 - \beta$ ולכן:

$$3 = (1-\beta)(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}\beta + \sqrt{2}$$

כלומר $\beta = \dfrac{-\sqrt{2}+1}{2}$, $\alpha = 1 - \beta = 1 - \dfrac{-\sqrt{2}+1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

לסיכום נקבל: $a_n = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}$

ג. $a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 3$

ד. $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 12a_{n-3}$, $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1$

המשוואה האופיינית: $t^3 - 3t^2 - 4t + 12 = 0$ קל לנחש שורש 2 ונקבל פירוק

$$(t-2)(t+2)(t-3) = 0$$

ולכן פתרון כללי הוא: $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3 3^n$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל משוואות: $\begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ a_1 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ a_2 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 1 \end{cases}$

פתרונות: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -\frac{1}{5}, \alpha_2 = \frac{1}{5}$

ולכן פתרון נוסחת הנסיגה: $a_n = \frac{3^n}{5} - \frac{(-2)^n}{5}$

ה. $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n \quad , \; a_0 = 2, a_1 = 10$

פתרון: הפולינום האופייני הוא $x^2 - 6x + 7$ ששורשיו הם $3 \pm \sqrt{2}$. לכן הפתרון הוא מהצורה $a_n = \alpha_1 \cdot (3+\sqrt{2})^n + \alpha_2 \cdot (3-\sqrt{2})^n$. נציב $n = 0$ ונקבל $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$.
נציב $n = 1$ ונקבל $(3+\sqrt{2}) \cdot \alpha_1 + (3-\sqrt{2}) \cdot \alpha_2 = 10$. מכאן מתקבל $\alpha_1 = 1+\sqrt{2}, \; \alpha_2 = 1-\sqrt{2}$.
לכן הפתרון הוא $a_n = (1+\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{2})^n$.

שאלה 2

מצאו את צורת הפתרון כללי עבור נוסחאות הנסיגה הבאות:

א. $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}$

ב. $a_n = 9a_{n-1} - 26a_{n-2} + 24a_{n-3}$

ג. בעבור סעיף א פתרו את נוסחאות הנסיגה עבור ערכי ההתחלה $a_0 = 1, a_1 = 3$.

א.

המשוואה האופיינית הינה $x^2 - 7x + 12 = 0$ השורשים שלה הם 3 ו-4 ועל כן הפתרון הכללי של הנוסחה הוא מהצורה $a_n = 3^n A + 4^n B$.

ב.

המשוואה האופיינית הינה $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. מקרה זה מסובך יותר מן המקרים הקודמים שכן הפולינום ממעלה שלישית – נחפש שורש (פתרון) ע"י ניחוש:

ננחש ש-1 הינו פתרון של המשוואה: נציב 1 ונקבל $1 - 9 + 26 - 24 = 0 \rightarrow -6 = 0$, לא נכון.

ננחש ש-2 הינו פתרון של המשוואה: נציב 2 ונקבל $8 - 36 + 52 - 24 = 0 \rightarrow 0 = 0$, נכון.

כעת שאנו יודעים ש- 2 הוא שורש של המשוואה, נחלק את הפולינום האופייני ב- $(x-2)$ כדי לקבל רכיב שהוא פולינום ממעלה שנייה. נקבל $(x-2)(x^2 - 7x + 12)$. אם כן למשוואה 3 שורשים שונים 2,3,4 ולכן הפתרון הכללי הינו מהצורה $a_n = 2^n A + 3^n B + 4^n C$.

ג.

עבור סעיף א':

$a_0 = 1 = 3^0A + 4^0B \to A = -B + 1$

$a_1 = 3 = 3^1A + 4^1B \to 3 = 3(-B + 1) + 4B = B + 3 \to B = 0 \to A = 1$

$a_n = 3^n$

<u>שאלה 3</u> לפוליטיקאי נשארו 50 יום עד הבחירות. בכל יום הוא נואם לפחות נאום אחד אבל סה"כ הוא לא ינאם יותר מ-75 נאומים. הוכיחו שיש רצף של ימים בהם הוא נאם סה"כ 24 פעמים.

הדרכה: הגדירו x_i את מספר הנאומים עד היום הi (עד בכלל). והסתכלו גם במספרים $x_i + 24$.

<u>פתרון</u> נסמן x_i את מספר הנאומים עד היום הi (עד בכלל).

אזי $1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_{50} \le 75$

נתבונן ב100 המספרים (השונים!): $x_1, x_2, \dots, x_{50}, x_1 + 24, x_2 + 24, \dots, x_{50} + 24$

כל אחד מהם הוא בין 1 ל99 (=24+75)

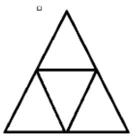
אז לפי שובך היונים יהיו 2 זהים: $x_i = x_j + 24$ (חייב להיות שוויון דווקא בין מס' כאלו)

וזה אומר ש $x_i - x_j = 24$ כלומר שמהיום ה $j + 1$ עד היום ה i (כולל) הוא נאם 24 פעמים בדיוק.

<u>שאלה 4</u>

א. צלף קולע 5 חצים לעבר מטרה שצורתה משולש שווה צלעות, שאורך צלעו 2 מטרים.
בהנחה שכל החצים פוגעים במטרה, הוכח שיש 2 חצים שיפגעו במטרה במרחק של מטר אחד לכל היותר זה מזה.

ב. צלף יורה $n^2 + 1$ חצים למטרה שצורתה משולש שווה צלעות, שאורך צלעו מטר אחד.
הוכיחו שיש שני חצים שמרחקם זה מזה לכל היותר $\frac{1}{n}$ מטרים.
הדרכה: חלקו את המטרה למשולשים שווי צלעות באופן כזה:



<u>שאלה 5</u> הוכח: בתוך קבוצה של n אנשים יש 2 אנשים עם אותו מספר חברים (בתוך הקבוצה).

הערה: אם x חבר של y אז y חבר של x. (חברות זה יחס סימטרי).

פתרון:

נסמן בk_i את מס' החברים של האיש הi. $0 \le k_i \le n-1 \quad (i = 1,2,\dots,n)$

נשים לב שאם למישהו יש $n-1$ חברים אז הוא בעצם חבר של כולם, ואז אין מישהו בקבוצה שאין לו חבר. ז"א ש 0 ו- $n-1$ לא יכולים שניהם להופיע כערכים של k_iים. מה שאומר של k_i יש $n-1$ אפשרויות של ערכים (כלומר $0 \le k_i \le n-2$ או $1 \le k_i \le n-1$ ובכל מקרה $n-1$ ערכים שונים אפשריים). לפי שובך היונים זה מכריח שיהיו $k_i = k_j$ כלומר שלאנשים ה i וה j יש אותו מספר של חברים.

שאלה 6

תהי A קבוצה בת 100 מספרים. הוכח שקיימת תת קבוצה לא ריקה של A שסכום אבריה מתחלק ב100.

פתרון:

נסדר את איברי A באופן כלשהו (למשל לפי הגודל): $a_1, a_2, \dots, a_{100}$

נסמן בk_i את סכום האיברים עד האיבר הi (כולל). $(i = 1,2,\dots,100)$

נסתכל על השאריות של k_i בחלוקה ב 100.

אם יש איזשהו k_i שהשארית שלו היא 0 אז ניקח את תת הקבוצה $\{a_1, \dots, a_i\}$

אחרת, השאריות של k_i בחלוקה ב100 הם בין 1 ל99- לפי שובך היונים זה אומר שיש k_i ו k_j (שונים) שיש להם אותה שארית בחלוקה ב100. בה"כ נניח $i > j$ אזי $k_j - k_i$ מתחלק ב100 (ללא שארית) ואז ניקח את הקבוצה $\{a_{i+1}, \dots, a_j\}$.

שאלה 7

האם קיימים גרפים בעלי 6 קודקודים עם דרגות:

א. 5,5,1,1,2,2
ב. 1,2,3,3,4,4
ג. 1,2,3,3,4,5

פתרון:

א. לא. יש 2 קודקודים מדרגה 5 כלומר שהם קשורים לכולם ולכן הדרגה המינימאלית של כל קודקוד היא 2.
ב. לא. סכום הדרגות הוא אי-זוגי. (ולפי משפט שלמדנו הסכום תמיד זוגי)
ג. כן.

שאלה 8

נתון גרף <u>פשוט</u> עם 100 קודקודים כך שהדרגה של כל קודקוד לפחות 50. הוכח שהגרף קשיר.

פתרון:

ניקח 2 קדקודים v, w. אם הם שכנים- מה טוב. אם לא אז בהכרח יש להם שכן משותף: כי לv יש 50 שכנים (בלי v, w) וכך גם לw. אבל יש רק 98 קדקודים בלי v, w- כך שחייבת להיות חפיפה בין קב' השכנים- משמע שכן משותף.