תחום הגדרה ב$\mathbb{R}^2$

דוגמה 1

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות. צייר זאת!

(א) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-1\right)$

תשובה: נדרוש שיתקיים $x^2+y^2-1>0$ (לפי תחום ההגדרה של לן), לכן $x^2+y^2>1$

(ב) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

תשובה: נדרוש $x \neq 0$ כי $\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

(ג) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

תשובה: נדרוש $\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1 \wedge x \neq 0$

גבול של פונקציה ב$\mathbb{R}^n$

הגדרה

יהי $u \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי $f : u \to \mathbb{R}$. נגדיר את הווקטור $\vec{P}_1 = (P_1, P_2, ...P_n) \in \mathbb{R}^n$.
יהי $P_0 \in \mathbb{R}^n$. נאמר שהווקטור $L \in \mathbb{R}^n$ הוא גבול הפונקציה $f\left(\vec{P}\right)$ בנקודה $\vec{P}_0$, אם לכל $\vec{P} \to \vec{P}_0$ מתקיים $f\left(\vec{P}\right) \to \vec{L}$

באופן דומה אם $\vec{x} \in \mathbb{R}$ שמתכנס ל$\vec{a}$ נסמן $\vec{x} \to \vec{a}$. במקרה זה $\|x-a\|_n \to 0$ (הכוונה לפי הנורמה הnית)

תזכורת

$$\|\vec{P}\|_n = \sqrt[n]{\left|\vec{P}_1\right|^n + ... + \left|\vec{P}_n\right|^n}$$

דוגמה 1

חשב את הגבול באם קיים עבור $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

פתרון

נבחר מסלול של קווים ישרים. ברור שהמשפחה של הישרים הנ"ל היא $y = kx$, ז"א שכדי ש$y \to 0$ נדרוש ש$x \to 0$. נבדוק במקרה זה

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,(kx)}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2}$$

קיבלנו שהגבול תלוי במסלול שאנו בוחרים. לדוגמא אם בחרנו $y = 2x$ או $y = 3x$ קיבלנו גבולות שונים, ולכן ברור שאין גבול.

לכן, ע"פ המסלול $y = kx$

דוגמה 2

חשב את הגבול באם קיים עבור $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

פתרון

נבדוק באופן דומה לתרגיל הקודם את המסלול $y = kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=kx}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^3}{x^2\left(1+k^2\right)} = \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{k^2}{1+k^2} = 0$$

ע"פ המסלול $y = kx$ אפשר להסיק שאם הגבול קיים אז הוא אפס. נבחר את המסלול $x = y^2$ כאשר $y \to 0$. במקרה זה

$$\lim_{\substack{y\to 0 \\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2+1} = 0$$

עדיין לא ניתן להסיק שהגבול הוא אכן אפס. במקרה זה ננסה להראות את נכונות הטענה... נראה שיטות בהמשך לעשות זאת.

דוגמה 3

חשב $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

פתרון

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$$

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ x = 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = 2$$

כאן בוודאות אין גבול, כי מצאנו שני מסלולים שונים עם גבולות שונים!

דוגמה 4

חשב: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$

פתרון

ננסה להוכיח כי דרגת מונה 6 ודרגת מכנה 2

$$0 \le \left|\frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}\right| \le \left|\frac{x^3 y^3}{x^2}\right| = |x|\,|y|^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

לכן קיבלנו ע"פ משפט הסנדוויץ כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}\right| = 0$ ⇐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

דוגמה 5 - דוגמה להצבה

חשב $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left[x\left(y^2 + z^2\right)\right]}{xy^2}$

פתרון

נשתמש בגבול הבא $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. במקרה שלנו

$$\frac{\sin\left[x\left(y^2 + z^2\right)\right]}{xy^2} = \frac{\sin\left[x\left(y^2 + z^2\right)\right]}{x\left(y^2 + z^2\right)} \cdot \frac{x\left(y^2 + z^2\right)}{xy^2}$$

נציב $t = x\left(y^2 + z^2\right)$ ברור כי $t \to 0$ ולכן $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. נשאר לחשב את הגבול:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{x\left(y^2 + z^2\right)}{xy^2} = \lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{y^2 + z^2}{y^2} = 5$$

לסיכום, הגבול המבוקש הוא $5 \cdot 1 = 5$

חשוב!

בגבול להוכיח שהגבול קיים נשתמש בשיטת ההצבה או במשפט הסנדויץ.

גבולות חוזרים

הגדרה

תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. הגבולות הבאים נקראים גבולות חוזרים:

$$\lim_{x\to x}\lim_{t\to b} f(x,y)$$

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

דוגמה 6

מצא את הגבולות החוזרים של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$ כאשר $(0,0)\leftarrow(x,y)$

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{0}{y^2}=0$$

לגבי הגבול הכפול $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$ נבחר מסלול $\begin{matrix}y=kx\\x\to0\end{matrix}$. נקבל

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=k0}}\frac{x^2}{k^2x^2+x^2}=\frac{1}{1+k^2}$$

שברור שתלוי בk

(ב) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}$ בנקודה $(x,y)\to(0,0)$.
עבור הגבולות החוזרים

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}\right)=not\,exist$$

הגבול הכפול:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x}$$

קל לראות במקרה זה שמודבר על פונקציה אפס כפולה חסומה. אם לא ראינו נציב $t=x^2+y^2$. נקבל $\lim_{t\to 0}t\sin(???)=0$

הארה

אם קיימים לפונקציה גבולות חוזרים והם שונים זה מזה אז אין גבול לפונקציה.
לא ניתן להסיק דבר לגבי גבול פונקציה כאשר הגבולות החוזרים שווים.

דוגמה(גבולות חוזרים שווים אבל הגבול לא קיים)

מצא את גבול הפונקציה בנקודה $(0,0)$ והגבולות החוזרים, כאשר $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

ז"א הגבולות החוזרים שווים. נבדוק האם הגבול הכפול קיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

ננס להראות שהגבול הכפול אינו קיים ע"י בחירת שני מסלולים:

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0$$

נבחר את המסלול $y=x$(מתבקשת בחירה זו כי אז יתאפס הגורם $(x-y)^2$ ודרגת המונה תהיה שווה לדרגת המכנה)

$$\lim_{\substack{y=0\\x\to 0}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

ז"א הגבול הכפול של הפונקציה לא קיים כי הראינו שבשני מסלולי שאיפה שונים קיבלנו גבולות שונים.

דוגמה

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x|^y$ וחשב את הגבולות החוזרים.

פתרון

נראה כי הסתכלות על הגבולות החוזרים במקרה זה יכולים להוביל לכך שהגבול אינו קיים:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}|x|^y\right)=1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}|x|^y\right)=0$$

ולכן במקרה זה הגבול הכפול לא קיים.