תרגיל בית 9 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א׳ תשע״ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת״ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 21.1.2018.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. מצאו בעזרת משפט קיילי שיכון $\varphi\colon U_8 \to S_4$ וכתבו אותו באופן מפורש.

שאלה 2. מצאו את הסדרים של כל תת־חבורות סילו של S_5. מי מהן אבליות?

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3. יהיו $p \leq q$ ראשוניים (לאו דווקא שונים).

א. הוכיחו שכל חבורה מסדר pq^n עבור $n \in \mathbb{N}$ אינה פשוטה.

ב. הוכיחו שגם חבורות מסדר 56 או 63 הן לא פשוטות. זה שונה מהסעיף הקודם.

ג. רשות (מאוד קשה!): תהי חבורה G מסדר p^aq^b עבור $a, b \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי G אינה פשוטה לכמה שיותר זוגות אפשריים (a, b) שאתם מצליחים, שלא טיפלנו בהם עד כה בכיתה או בתרגיל.
רמז: התשובה היא לכל a, b. הוכחה לכך דורשת בדרך כלל כמה קורסים.

שאלה 4. יהי p מספר ראשוני.

א. תהי G חבורה לא אבלית מסדר p^3. הוכיחו כי $Z(G) = G'$.

ב. תהי G חבורה סופית, ונניח $p \mid |G|$. הוכיחו שקיים $z \in G$ מסדר p כך ש-$C_G(z)$ מכיל תת־חבורת p-סילו של G. רמז: בחרו איבר השייך למרכז של תת־חבורת p-סילו.

שאלה 5. תהי חבורה G מסדר p^tm, כאשר p ראשוני, $m > 1$ טבעי שזר ל-p ו-$t \in \mathbb{N}$.

א. נניח ש-$|G|$ לא מחלק את $m!$ (ניתן להסתפק בכך ש-$|G|$ לא מחלק את $n_p!$). הוכיחו כי G לא פשוטה. רמז: העידון של משפט קיילי.

ב. הוכיחו שחבורות מסדרים 36, 150 או 160 אינן פשוטות.

שאלה 6. תהינה G, H חבורות.

א. הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(G) \times \operatorname{Inn}(H) \cong \operatorname{Inn}(G \times H)$

ב. הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(S_3) \cong S_3$ ומצאו אוטומורפיזם שאינו פנימי של החבורה $S_3 \times S_3$.
רמז: נוח לחשוב על $S_3 \times S_3$ כתת־חבורה של S_6 ושם לחפש אוטומורפיזם.

שאלה 7. תהי G חבורה.

א. הוכיחו כי $\operatorname{Inn}(G) \lhd \operatorname{Aut}(G)$. רמז: הראו כי $\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1} = \gamma_{\varphi(g)}$ לאיברים מתאימים.

ב. הוכיחו שאם $Z(G) = \{e\}$, אז $C_{\operatorname{Aut}(G)}(\operatorname{Inn}(G)) = \{\mathrm{id}\}$ ובפרט מתקיים $Z(\operatorname{Aut}(G)) = \{\mathrm{id}\}$.

שאלה 8. תהי G חבורה, ותהי $H \lneq G$ תת־חבורה המוכלת ממש ב-G.

א. הוכיחו שאם G סופית, אז גם האיחוד $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ מוכל ממש ב-G. רמז: העזרו באינדקס של המנרמל.

ב. כעת לא נניח ש-G סופית, אבל שהאינדקס $[G : H] < \infty$ עדין סופי. הוכיחו שהסעיף הקודם עדין נכון. רמז: H מכילה תת־חבורה נורמלית וקצת משפטי האיזומורפיזם.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. נראה שישנן חבורות שבהן תת־חבורת הקומוטטור מכילה איברים שאינם קומוטטורים.

א. נסמן $G = GL_2(\mathbb{R})$. הוכיחו $G' \subseteq SL_2(\mathbb{R})$ (למעשה יש שיוויון) וכי $-I_2 \in G'$.

ב. אתגר: הוכיחו כי $-I_2 \in G'$ הוא קומוטטור של איברי G, אבל לא של איברי G'. נסו להציג אותו כמכפלה של קומוטטורים של G'. רמז: הבינו מה היא העקבה של קומוטטור.

ג. תהי H חבורה שבה $|H'| < [H : Z(H)]^2$. הוכיחו כי H' מכילה איברים שאינם קומוטטורים. רמז: קודם הראו ש-$[ay, bz] = [a, b]$ לכל $a, b \in H$ ו-$y, z \in Z(H)$.
הערה: לכל p קיימות חבורות-p מטא-אבליות שמקיימות את התנאי הזה.

בהצלחה!