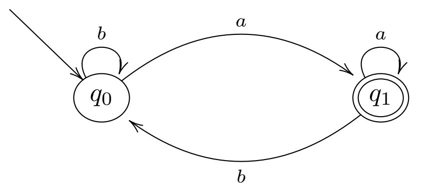
הגדרות וסימונים

אות	סימן בסיסי σ
א"ב	Σ, אוסף האותיות
מילה	w, רצף של אותיות
$\lvert w\rvert$	אורך המילה
$\#_\sigma(w)$	מספר מופעי האות σ במילה w.
ϵ	המילה הריקה. $\lvert\epsilon\rvert = 0$
Σ^n	אוסף המילים באורך n מעל Σ
Σ^+	אוסף המילים הניתן לייצר מאותיות Σ. $\Sigma^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n$
Σ^*	Σ^+ בתוספת ϵ. $\Sigma^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \Sigma^n$
הערה -	$\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$
שרשור	$w_1, w_2 \in \Sigma^*$, $w_1 \cdot w_2 = w_1 w_2$
רישא	x רישא של y אם קיימת $z \in \Sigma^*$ כך ש$y = x \cdot z$
סיפא	x סיפא של y אם קיימת $z \in \Sigma^*$ כך ש$y = z \cdot x$
תת מילה	x תת מילה של y אם קיימות $z_1, z_2 \in \Sigma^*$ כך ש$y = z_1 x z_2$
רוורס	אם $w = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ אז $w^R = \sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1$
שפה	אוסף(קבוצה) של מילים מעל Σ. נסמן L
שרשור	$L_1 \cdot L_2 = \left\{ w_1 \cdot w_2 \middle\vert \begin{array}{l} w_1 \in L_1 \\ w_2 \in L_2 \end{array} \right\}$
L^n	$L^n = \overbrace{L \cdot L \cdots L}^{n \text{ times}}$
L^+	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n$
L^*	$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} L^n$
רוורס	$L^R = \left\{ w^R \middle\vert w \in L \right\}$

אוטומט סופי דטרמיניסטי מלא

דוגמה לאוטומט

אוטומט של מכונת משקאות:



a הכנסת 5 שקלים

b הוצאת כסף

ניתן להתייחס לאוטומט כקופסה שחורה שמקבלת קלט ־ מילה w ־ ומחזירה פלט ־ האם מקבל את w או לא?

הגדרה פורמלית

אוטומט הוא חמישיה:

$$A = \langle Q, \Sigma, q_0, F \rangle$$

כאשר:

Q קבוצת מצבים סופית

Σ א"ב

q_0 המצב ההתחלתי

δ פונקציית מעברים

F מצבים מקבלים

פונקציית המעברים

פונקציית המעברים δ מוגדרת $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ־ לכל מצב ולכל אות מוגדר מצב חדש.
ניתן להגדיר בתור רשימה ־ למשל עבור הדוגמה

$$\begin{aligned}
\delta\left(q_0, a\right) &= q_1 \\
\delta\left(q_0, b\right) &= q_0 \\
\delta\left(q_1, a\right) &= q_1 \\
\delta\left(q_1, b\right) &= q_0
\end{aligned}$$

מספר השורות ברשימה צריך להיות **בדיוק** $|\Sigma|\cdot|Q|$
אפשר גם להגדיר אותה באמצעות טבלה:

$\Sigma \backslash Q$	q_0	q_1
a	q_1	q_1
b	q_0	q_0

הגדרה - מסלול ריצה

מסלול ריצה של $w=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$:

$$q_0 \xrightarrow{\sigma_1} q_1 \xrightarrow{\sigma_2} q_0 \xrightarrow{\sigma_3} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} q_4 \xrightarrow{\sigma_n} q_0$$

הרחבה למילים של δ

$$\hat{\delta}\left(q,\epsilon\right)=q$$

$$\hat{\delta}\left(q,w\cdot\sigma\right)=\delta\left(\hat{\delta}\left(q,w\right),\sigma\right)$$

הגדרה - שפת האוטומט

שפת האוטומט -

$$L\left(A\right)=\left\{w\middle|\hat{\delta}\left(q\cdot w\right)\in F\right\}$$

כזכור, F היא קבוצת המצבים המקבלים, $F\in Q$. נסמן מצב מקבל ע"י q.

המשימה

בהינתן שפה L מעל Σ, בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי מלא המקבל את L, כלומר $L\left(A\right)=L$.

בדוגמאות שלנו - $\Sigma=\{a,b\}$

למה הכוונה בדטרמיניסטי ומלא?

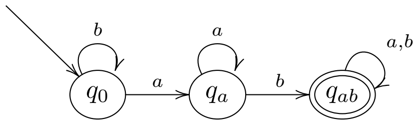
מלא לכל מצב ולכל אות, פונקציית המעברים מגדירה מצב חדש.

דטרמיניסטי לכל מצב ולכל אות, יש בדיוק מצב אחד שעוברים אליו.

נרצה לבנות אוטומט עם כמה שפחות מצבים.

דוגמה

אוסף המילים המכילות תת המילה/קטע/מקטע ab

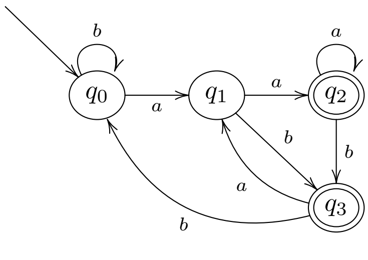


ניתן להוכיח באופן פורמלי שהאוטומט עובד, אבל זה ארוך ומסובך, ולא נרצה לעשות את זה עבור כל אוטומט שנכתוב. במקום זה, יותר קל לבדוק את ריצת האוטומט עבור מספר מילים.
הבעיה היא, שתמיד יכול להיות שפספסנו בדיוק את המילה שלא עובדת כמו שצריך. לכן עדיף לנסות להבין את הלוגיקה.

- מתחילים במצב q_0. אם מקבלים b, זה לא מקדם אותנו לשום מקום, ולכן נשארים בq_0. אם מקבלים a, אז זה כבר ההתחלה של תת המילה ab שאנו מחפשים, ולכן אנו עוברים למצב q_a, שמסמל שאנו זוכרים שקיבלנו a.
- במצב q_a, אם מקבלים b, אז מגיעים למצב q_{ab}, שאומר שכבר קיבלנו את תת המילה שחיפשנו. אם מקבלים a, אז נשארים בq_a, כי אנחנו עדיין מחכים לb שיבוא אחריו.
- מצב q_{ab} זוכר שכבר קיבלנו את תת המילה ab, ולכן נשארים בו עד לסוף המילה.

דוגמה 2

שפת המילים מעל Σ בהן האות הלפני אחרונה היא a.



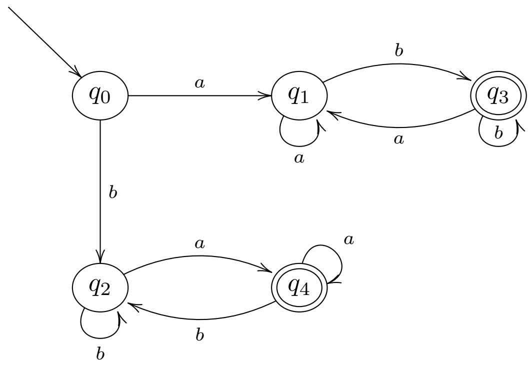
בצורה פורמלית, האוטומט הוא

$$A = \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, q_0, \delta, \{q_2, q_3\} \rangle$$

אין צורך לכתוב את δ בצורה פורמלית - הציור יותר מובן.

דוגמה 3

$$L = \left\{ w = \sigma_1 \cdots \sigma_n \middle| \begin{array}{c} \sigma_i \in \Sigma \\ \wedge \\ \sigma_1 \neq \sigma_n \end{array} \right\}$$



q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
a
b