אלגברה מופשטת 3 - תרגיל 2

1. מצאו בסיס $B=\{v_0,...,v_n\}$ (מהו n?) של $F[x]/<x^4+2x+1>$ כמ"ו מעל F, והציגו את כל המכפלות v_iv_j כצירופים לינאריים של אברי B.

פתרון: בסיס מתאים הוא $B=\{1,x,x^2,x^3\}$ לפי טענה שראינו בתחילת תרגול 2 (נוותר על הסימון $\overline{x}$ למען הנוחיות). כעת:

	1	x	x^2	x^3
1	1	x	x^2	x^3
x	x	x^2	x^3	$x^4=-1-2x$
x^2	x^2	x^3	$x^4=-1-2x$	$x^5=x\cdot x^4=-x-2x^2$
x^3	x^3	$x^4=-1-2x$	$x^5=-x-2x^2$	$x^6=x^2\cdot x^4=-x^2-2x^3$

2. א. מצאו את הפולינום המינימלי של $\alpha+3$ בהינתן שהפולינום המינימלי של α הוא .
נסמן $f(x)=x^4+9x^2+6$. לפי שאלה 3 בתרגיל 2, נקבל ש
$g(x)=f(x-3)=x^4-12x^3+63x^2-162x+168$ הוא אי-פריק וגם $g(\alpha+3)=f(\alpha)=0$, ולכן g הוא הפולינום המינימלי.

ב. מצאו את הפולינום המינימלי של $\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

פתרון: נסמן $\alpha=\sqrt{6}+\sqrt{7}$. מכאן ש

$$\alpha^2=13+2\sqrt{42}\Rightarrow\frac{\alpha^2-13}{2}=\sqrt{42}\Rightarrow\left(\frac{\alpha^2-13}{2}\right)^2=42$$
$$\Rightarrow\alpha^4-26\alpha^2+1=0$$

לכן α הוא שורש של $f(x)=x^4-26x^2+1$.

כעת נשאר להראות ש f אי-פריק.

דרך א:

כיוון ש $\deg f=4$ נקבל ש $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7}):\mathbb{Q}]\le 4$. מצד שני מתקיים $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{6})\subset\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7})$

מדוע? כדי להראות את ההכלה מימין, מספיק להוכיח ש $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7})$ וגם ש $\sqrt{6}+\sqrt{7}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

נשים לב ש $\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^3=27\sqrt{6}+25\sqrt{7}$, לכן $\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^3-25\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)=2\sqrt{6}$ ומכאן נקבל $\sqrt{6}\in\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7})$.

אם $\sqrt{6}+\sqrt{7}\in\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ אז נקבל ש $\sqrt{7}\in\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. כיוון ש $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}):\mathbb{Q}]=2$ נקבל ש $1,\sqrt{6}$ בסיס של $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. לכן $a+b\sqrt{6}=\sqrt{7}$ נעלה בריבוע ונקבל: $\sqrt{6}=\dfrac{49-6b^2-a^2}{2ab}$ בסתירה לכך ש $\sqrt{6}$ אינו רציונלי.

כעת $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7}):\mathbb{Q}(\sqrt{6})][\mathbb{Q}(\sqrt{6}):\mathbb{Q}]=2[\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7}):\mathbb{Q}(\sqrt{6})]\geq 4$.
לכן בהכרח $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{7}):\mathbb{Q}]=4$ ומכאן שבהכרח f אי-פריק.

דרך ב: ניתן לבדוק ש $\alpha=\sqrt{6}+\sqrt{7},\beta=-\sqrt{6}+\sqrt{7},\gamma=\sqrt{6}-\sqrt{7},\delta=-\sqrt{6}-\sqrt{7}$ הם ארבעת שורשיו של f. לכן $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$. ניתן לבדוק שכל מכפלה חלקית של הגורמים לא נותנת פולינום עם מקדמים רציונליים.

דרך ג: מראים בדרך הרגילה שאין ל f שורשים רציונליים (במקרה זה האפשרויות הן $x=\pm 1$). אם f מתפרק אז הוא מתפרק לשני גורמים מדרגה 2.

$$\begin{aligned}&f(x)=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=\\&=x^4+(c+a)x^3+(d+ac+b)x^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}$$

אם כך $a+c=0,bd=1,ad+bc=0,d+ac+b=-26$.

$a+c=0,ad+bc=0\Rightarrow a(b-d)=0$.

אם $a=0$ אזי $c=0$ ונשארנו עם $bd=1,d+b=-26$ ומכאן $b^2+26b+1=0$ אבל אין למשוואה זאת שורשים רציונליים, סתירה.

אם $b-d=0$ אזי $b=d,b^2=1\Rightarrow ac=-26\pm 2\Rightarrow a^2=26\mp 2\Rightarrow a^2\in\{24,28\}$, סתירה.

3. הראו ש $cis\left(\dfrac{\pi}{6}\right),cis\left(\dfrac{2\pi}{5}\right),cis\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ניתנים לבניה.

$\cos(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$, כיוון שניתן לקחת שורש ולחלק ב 2, אזי המספר ניתן לבניה.

לפי 4א $cis\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ניתן לבניה אם ורק אם הזוית $\dfrac{\pi}{6}$ ניתנת לבניה, ואז ניתן לחלק אותה ב 2, ולקבל $\dfrac{\pi}{12}$ ואז שוב לפי 4א נקבל ש $cis\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ ניתן לבניה.

בעזרת שימוש בסיסי בטריגונומטריה ניתן לקבל ש
$\cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),\sin(\frac{2\pi}{5})=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. ניתן לבנות שני מספרים אלה כי ניתן לקחת שורש, לחבר, להחסיר ולחלק.

4. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אפשר לבנות זוית θ $\Leftrightarrow$ $cis(\theta)$ ניתן לבניה $\Leftrightarrow$ $\cos(\theta)$ ניתן לבניה

פתרון:

אם ורק אם 1: אפשר לבנות זוית θ אם אפשר לבנות שני ישרים כך שהזווית ביניהם היא θ. ניתן להזיז ולסובב את הישרים כך שנקודת החיתוך ביניהם היא (0,0) ואחד הישרים הוא ציר x והזוית נשמרת (מדוע מותר לעשות זאת?). כעת מעבירים מעגל ברדיוס 1 סביב ראשית הצירים, ומקבלים שנקודת החיתוך עם הישר השני היא בדיוק $cis(\theta)$. בכיוון השני $cis(\theta)$ ניתן לבניה, והזוית של הישר $L(0,cis(\theta))$ עם ציר x היא θ.

אם ורק אם 2: אם $cis(\theta)$ ניתן לבניה, אזי $\cos(\theta)$ ניתן לבניה כקואורדינטת x שלו. בכיוון השני אם $\cos(\theta)$ ניתן לבניה, אזי $\sin(\theta)=\pm\sqrt{1-cos^2(\theta)}$ ושני מספרים אלה ניתנים לבניה.

ב. אפשר לבנות מצולע משוכלל בן n צלעות $\Leftrightarrow$ $\cos(\frac{2\pi}{n})$ ניתן לבניה

פתרון: אפשר לבנות מצולע משוכלל בן n צלעות $\Leftrightarrow$ $\frac{2\pi}{n}$ ניתנת לבניה ואז לפי א.

ג. הראו שאם ניתן לבנות מצולע משוכלל בן n צלעות אזי ניתן לבנות מצולע משוכלל בן m צלעות כאשר $m|n$.

ניתן להכפיל זויות בכל מספר שלם, ולכן ניתן להכפיל את הזווית $\frac{2\pi}{n}$ ב $\frac{n}{m}$ ולקבל את הדרוש לפי ב.

5. הראו שלא ניתן לחלק זויות ב 5.

פתרון:

נראה ש $cis(\frac{2\pi}{25})$ אינו ניתן לבניה: $cis(\frac{2\pi}{25})$ הוא שורש של $f_{25}=\frac{x^{25}-1}{x-1}$, אך פולינום זה אינו אי-פריק. דרגתו היא 24, והוא בהכרח מתחלק ב $\Phi_5=\frac{x^5-1}{x-1}$ שדרגתו 4 (כל שרשי Φ_5 הם שורשי-5 של היחידה, ולכן גם שורשי-25 של היחידה). לכן הפולינום האי-פריק של $cis(\frac{2\pi}{25})$ הוא מדרגה ≥ 20.

במפורש $g(x)=f_{25}/\Phi_5=\frac{x^{25}-1}{x^5-1}=x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1$. פולינום זה אי-פריק. ניתן להראות זאת בעזרת קריטריון איזנשטיין על $g(x+1)$ ו $p=5$, או להשתמש בעובדה: נסמן ב Φ_n את הפולינום

המינימלי של $cis(\frac{2\pi}{n})$, אזי $\Phi_n(x)=\frac{x^n-1}{\prod_{\substack{d|n\\ d<n}}\Phi_d(x)}$. לכן $[\mathbb{Q}(cis(\frac{2\pi}{25}):\mathbb{Q}]=20$ וזאת אינה חזקת 2,

ולכן $cis(\frac{2\pi}{25})$ אינו ניתן לבניה.

ראינו בתרגיל 3 ש $cis(\frac{2\pi}{5})$ ניתן לבניה, ולכן אם ניתן לחלק זויות ב 5, אזי גם $cis(\frac{2\pi}{25})$ ניתן לבניה, סתירה.

6. עבור איזה n-ים טבעיים ניתן לבנות את $\sqrt[n]{2}$?

פתרון:

הפולינום המינימלי של $\sqrt[n]{2}$ הוא x^n-2 (אי-פריק לפי איזנשטיין). כלומר $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}):\mathbb{Q}]=n$. לכן תנאי הכרחי שניתן יהיה לבנות את $\sqrt[n]{2}$ הוא ש $n=2^k$. אך ניתן לבנות $\sqrt[2^k]{2}$ ע"י לקיחת שורש k פעמים, לכן ניתן לבנות את $\sqrt[n]{2}$ אם ורק אם $n=2^k$.