

אוניברסיטת תל-אביב

פקולטה למדעים מדויקים

סמסטר א' תשע"ג, מועד א'
תאריך: 28.01.13

מבחן סוף סמסטר ב' "חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1"

המרצה: פרופ' יעקב יעקובוב

הנחיות

- משך הבחינה 3 שעות.
- חומר עזר מותר:
- 1. דף נוסחאות אחד מצורף למבחן.
- 2. מחשבון כיס רגיל (לא גרפי, לא ניתן לתכנות).
- אסורה אחזקה של טלפון סלולרי, מחשב כף יד או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה.
- אין להשתמש בשיטות אשר לא נלמדו בקורס.

מבנה הבחינה

- יש לענות על 4 מתוך 6 השאלות: שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'.
- תשובה מלאה, נכונה ומנומקת תזכה ב 25 נקודות.
- יש לרשום בראש המחברת הראשונה את מספרי השאלות שנפתרו.

ב ה צ ל ח ה !

כל הזכויות שמורות ©
מבלי לפגוע באמור לעיל, אין להעתיק, לצלם, להקליט, לשדור, לאחסן מאגר מידע, בכל דרך
שהיא, בין מכונית ובין אלקטרונית או בכל דרך אחרת כל חלק שהוא מטופס הבחינה.

חלק א' – יש לפתור שאלה אחת מתוך שתיים

שאלה 1. להוכיח או להפריך:

- (א) (10 נק') נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת ב- $[a, b]$. אם $f^2(x)$ אינטגרבילית לפי רימן ב- $[a, b]$ אז גם $f(x)$ אינטגרבילית לפי רימן ב- $[a, b]$.
- (ב) (10 נק') ל- $f^2(x)$ קיימים שני אינטגרלים דרבו (עליון ותחתון) ב- $[a, b]$ אם ורק אם ל- $f(x)$ קיימים שני אינטגרלים דרבו ב- $[a, b]$.
- (ג) (5 נק') אם $f(x)$ אינטגרבילית לפי רימן ב- $[a, b]$ ו- $g(x)$ אינה אינטגרבילית לפי רימן ב- $[a, b]$ אז גם $f(x)g(x)$ אינה אינטגרבילית לפי רימן ב- $[a, b]$.

שאלה 2. (א) (15 נק') יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות ב- (a, b) . להוכיח כי הפונקציה

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
 רציפה ב- (a, b) .

- (ב) (10 נק') נתונה פונקציה $f(x)$ ב- (a, b) . להוכיח או להפריך: אם $g(x) = \max_{t \in (a, x)} f(t)$ רציפה ב- (a, b) אז גם $f(x)$ רציפה ב- (a, b) .

חלק ב' – יש לפתור שלוש שאלות מתוך ארבע

- שאלה 3. (25 נק') לחקור ולשרטט את גרף הפונקציה $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$ לפי הסעיפים: תחום ההגדרה, נקודות החיתוך עם הצירים, זוגיות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון מקומי, תחומי קמירות כלפי מעלה ומטה, נקודות פיתול, אסימפטוטות, גרף.

- שאלה 4. (א) (13 נק') להוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}$ מתכנסת.

(ב) (12 נק') לחשב את האינטגרל הלא מסוים $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

שאלה 5. (א) (16 נק') לבדוק הטורים הבאים להתכנסות/התבדרות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{3}} \left(\sin\left(\frac{2012}{n}\right) + \sin\left(\frac{2012}{n+1}\right) \right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{3}} \left(\sin\left(\frac{2012}{n}\right) - \sin\left(\frac{2012}{n+1}\right) \right)$$

- (ב) (9 נק') נניח $f(x) > 0$ ורציפה בתחום $x \geq 0$. להוכיח כי

$$g(x) = \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$
 עולה בתחום $x > 0$.

- שאלה 6. (א) (10 נק') להוכיח שעבור $0 \leq x \leq 1/2$ מתקיים $e^x \approx 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ והשגיאה לא עולה על 0.01.

(ב) (10 נק') להוכיח את אי-השוויון $\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$ לכל $y > x > 0$.

(ג) (5 נק') הפונקציה $\frac{1}{x}$ היא אי-זוגית. האם $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$? לנמק!