בס"ד

לינארית ב - תרגיל יד - פתרון

1. כל הפולינומים ב-$R_2[x]$ שמקיימים $f(0)=0$ זה למעשה כל הפולינומים מהצורה $bx+ax^2$. הבסיס של המרחב הוא: $\{x, x^2\}$. לכן מספיק למצוא את המרחב הניצב לשני הוקטורים האלו.

נקח כללי של איבר ב-$R_2[x]$: $c+bx+ax^2$.

$$\text{I}\quad \langle ax^2+bx+c, x^2\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)x^2\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 ax^4+bx^3+cx^2\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{ax^5}{5}+\frac{bx^4}{4}+\frac{cx^3}{3}\Big|_0^1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3} = 0$$

$$\text{II}\quad \langle ax^2+bx+c, x\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (ax^2+bx+c)x\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (ax^3+bx^2+cx)\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}\Big|_0^1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2} = 0$$

קיבלנו 2 משוואות ב-3 נעלמים, לכן יש לנו דרגת חופש אחת.

נסמן $c=t$, אז:

$$\text{I}\quad \frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{t}{3} = 0 \;/\cdot 5$$

$$a+\frac{5b}{4}+\frac{5t}{3} = 0$$

$$a = -\frac{5b}{4}-\frac{5t}{3}$$

$$\text{II}\quad \frac{\left(-\frac{5b}{4}-\frac{5t}{3}\right)}{4}+\frac{b}{3}+\frac{t}{2} = 0$$

$$-\frac{5b}{16}-\frac{5t}{12}+\frac{b}{3}+\frac{t}{2} = 0$$

$$-\frac{15b}{16\cdot 3} + \frac{16b}{3\cdot 16} - \frac{5t}{12} + \frac{6t}{12} = 0$$

$$\frac{b}{48} + \frac{t}{12} = 0 \quad /\cdot 12$$

$$\frac{b}{4} + t = 0$$

$$b = -4t$$

$$a = 5t - \frac{5t}{3} = 3\tfrac{1}{3}t$$

לכן המרחב הניצב הוא כל הפולינומים מהצורה $3\frac{1}{3}t x^2 - 4tx + t$

$$V^{\perp} = span(3\tfrac{1}{3}x^2 - 4x + 1)$$

ב. נראה שהמרחב המטריצות המשולשות עליונות ניצב לכל המטריצות $A=(a_{ij})$ כך ש:
$a_{ij}=0$ כאשר $i>j$. וכן שהמרחב הניצב שווה לכל המטריצות $B=(b_{ij})$
שמקיימות $b_{ij}=0$ כאשר $i \leq j$

נשים לב שאם B מקיימת את התנאי הנ"ל, אז B^t מקיימת $b^t_{ij}=0$ כאשר
$i \geq j$

נראה ש- $\langle A,B\rangle = 0$.

$$\langle A,B\rangle = tr(AB^T)$$

טענה: עבור A,B כמו שהגדרנו, כל איבר באלכסון של AB^T הוא 0.

הוכחה: $(AB^T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b^t_{ki}$

כאשר $k<i$ $a_{ik}=0$, וכאשר $k \geq i$ $b^t_{ki}=0$. לכן סה"כ זה סכום של אפסים,
ולכן שווה 0.

אז הוכחנו שכן כל המטריצות הללו מאונכות למרחב המטריצות המשולשות-עליונות.
ובגלל שהמימד שלהם שווה ביחד ל-n^2, זה בדיוק המרחב הניצב.
(המימד של המטריצות המשולשות העליונות הוא $\frac{n(n+1)}{2}$ והמימד של המטריצות שיש להן
0 על האלכסון ומתחתיו הוא $\frac{n^2-n}{2}$)

ג. טענה: המרחב הניצב הוא המטריצות הסקלריות.

הוכחה: תהי A מטריצה עם עקבה 0, ו- αI סקלרית.

$$\langle \alpha I, A\rangle = tr(\alpha I A^t) = tr(\alpha A^t) = \alpha tr(A^t) = \alpha \underbrace{tr(A)}_{0} = 0$$

מצד שני, המימד של המטריצות עם $tr=0$ הוא n^2-1, והמימד של המטריצות

המשך

המסקנות הזו 1 ולכן המשלימות המסקנות שוות בדיוק למרחב הנ״ל.

(כי ראינו ש- $V^\perp \subset$ משלימות סגורות ויש להן אותו מימד).

2. א. הפרכה: נקח למשל: $U_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $U_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $U_3=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$$U_1\oplus U_2\oplus U_3=\mathbb{R}^3$$

אבל $U_1^\perp=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ו- $U_2^\perp=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ולכן $U_1^\perp\cap U_2^\perp\neq\emptyset$.

אז $U_1^\perp$ ו- $U_2^\perp$ לא סכום ישר.

ב. הפרכה: $U_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $U_2=\left\{\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\right\}$ $U_1\oplus U_2=\mathbb{R}^2$

אבל $U_1^\perp\neq U_2$.

ג. ידוע ש- $A^\perp=\{\mathrm{span}(A)\}^\perp$

$$(A-\{v_1\})^\perp=\mathrm{span}\{A-\{v_1\}\}^\perp$$

לכן: $A^\perp=(A-\{v_1\})^\perp$

$$\Downarrow$$

$$\{\mathrm{span}(A)\}^\perp=\mathrm{span}(A-\{v_1\})^\perp$$

$$\Downarrow$$

$$\dim(\mathrm{span}(A))^\perp=\dim(\mathrm{span}(A-\{v_1\}))^\perp$$

$$\Downarrow$$

$$\dim\mathrm{span}\,A=\dim\mathrm{span}(A-\{v_1\})$$

כמו כן $\mathrm{span}(A-\{v_1\})\subseteq\mathrm{span}(A)$

לכן $\mathrm{span}(A-\{v_1\})=\mathrm{span}\,A$

$v_1\in\mathrm{span}\,A \Leftarrow v_1\in\mathrm{span}(A-\{v_1\}) \Leftarrow v_1\in\mathrm{span}\{v_2,\dots,v_n\} \Leftarrow$

v_1 תלוי ב- $v_2,\dots,v_n$ לכן הקבוצה $\{v_1,\dots,v_n\}$ תלויה לינארית

3. א. נרצה למצוא את הגרעין.

$$\ker T=\mathrm{span}\{(1,2,0,4)(1,0,1,0)\}^\perp$$

כלומר, צריך לפתור את המשוואות:

$$\mathrm{I}\quad \langle(a,b,c,d)(1,2,0,4)\rangle=0$$

$$a+2b+4d=0$$

$$\mathrm{II}\quad \langle(a,b,c,d)(1,0,1,0)\rangle=0$$

$$a+c=0$$

נציב $a=t$ נקבל $c=-t$. נציב $d=s$ נקבל: $b=\frac{t}{2}-2s$

המשך

אז: $\ker T = \{(t, -\frac{t}{2}-2s, -t, s)\} =$

$\text{span}\{(1,-\frac{1}{2},-1,0),(0,-2,0,1)\}$

נשלים את $\{(1,0,1,1),(1,-\frac{1}{2},-1,0),(0,-2,0,1)\}$ לבסיס,

ע"י הוספת הוקטור $(0,0,0,1)$.

לפי משפט ההגדרה של העתקה לינארית, ניתן לבנות העתקה:

$T(1,0,1,1)=(1,2,1,1)$

$T(1,-\frac{1}{2},-1,0) = T(0,-2,0,1) = (0,0,0,0)$

$T(0,0,0,1)=(0,0,0,1)$

העתקה זו עונה על הדרישות

ג. ניתן לראות, ע"י דירוג, ש- $\dim A^{\perp} = 2$. ולכן $\dim \text{span} A = 2$.

אבל ב- A יש 3 וקטורים $\Leftarrow$ A תלויה

ד. $\|v_1+\sqrt{2}v_2+\dots+\sqrt{n}v_n\| = \sqrt{\langle v_1+\dots+\sqrt{n}v_n, v_1+\dots+\sqrt{n}v_n\rangle} =$

$$\sqrt{\underbrace{\langle v_1,v_1\rangle}_{1} + \sqrt{2}\underbrace{\langle v_1,v_2\rangle}_{0} + \dots + \sqrt{n}\underbrace{\langle v_1,v_n\rangle}_{0} + \sqrt{2}\underbrace{\langle v_2,v_1\rangle}_{0} + 2\underbrace{\langle v_2,v_2\rangle}_{1} + \dots + \sqrt{n}\underbrace{\langle v_n,v_1\rangle}_{0} + \sqrt{n}\cdot\sqrt{2}\underbrace{\langle v_n,v_2\rangle}_{0} + \dots + n\underbrace{\langle v_n,v_n\rangle}_{1}}$$

כפי הגדרה של ליניאריות, וכן אפשר לפרק לסכומים, ולהוציא החוצה סקלרים

$= \sqrt{1+2+3+\dots+n} = \sqrt{\frac{n+1}{2}\cdot n}$