בס"ד

לינארית 2- תרגיל 2 מדמ"ח

1. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות קבע האם היא העתקה לינארית או לא. אם כן, הוכח.
   א. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, T(x,y)=(\sqrt{|x|},\sqrt{|y|},\sqrt{|xy|})$
   ב. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T(x,y)=(-x+2y,3x-y)$
   ג. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, T(x,y)=(x^3,x^3+y^3)$ מעל $\mathbb{R}$.
   ד. $T:\mathbb{Z}_3^2\to\mathbb{Z}_3^2, T(x,y)=(x^3,x^3+y^3)$ מעל $\mathbb{Z}_3$. (רמז – תבדקו מה קורה לכל אחד מהאיברים של $\mathbb{Z}_3$ כשמעלים אותו בשלישית....)
   ה. תהי $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כלשהי. נגדיר $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $T(A)=BA-AB$.

2. מצא את $S\circ T$ עבור $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_3[x], T(p(x))=D(x^2p(x))$
   $S:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_4[x], S(p(x))=D^2((x^3-x)p(x))$, כאשר D הוא פעולת הגזירה.

3. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית שמקיימת
   $T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$. מצא את כל הוקטורים $v\in\mathbb{R}^3$ שמקיימים $T(v)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

4. תהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_5[x]$ העתקה לינארית שמקיימת
   $T(1)=x, T(1+x)=x^3+x^2, T(1+x+x^2)=1-x^2+x^4$. מצא נוסחה מפורשת עבור $T(p(x))$ לכל $p(x)\in\mathbb{R}_2[x]$.

5. האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}_5[x]$ שמקיימת
   $T(-1,4,2,1)=x+1, T(-1,1,1,1)=x, T(1,2,0,-1)=2$?

6. הוכח שהיחס $V\cong W$ הוא יחס שקילות.

7. תהי $T:V\to W$ ה"ל. הוכיחו כי אם T חח"ע ו $\{v_1,...,v_n\}$ בתל, אז גם $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.